LABORATOIRE DE PHYSIQUE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS VII

par

Colette LEWINER

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la Thèse : EFFET HALL ANORMAL DANS LES SEMI-CONDUCTEURS.

Soutenue le 26 Mars 1973 devant la Commission d'Examen

MM. P. AIGRAIN Président

P. NOZIERES)
J. SOLOMON) Examinateurs
O. BETBEDER)

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS VII

par

Colette LEWINER

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEURS ES SCIENCES

Sujet de la Thèse : EFFET HALL ANORMAL DANS LES SEMICONDUCTEURS

Soutenue le 26 mars 1973 devant la Commission d'Examen

MM. P. AIGRAIN Président

P. NOZIERES)
J. SOLOMON) Examinateurs
O. BETBEDER)

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je remercie Monsieur le Professeur C. Benoît à la Guillaume qui m'a permis d'effectuer ce travail de recherche dans le Groupe de Physique des Solides de l'Ecole Normale Supérieure.

Je suis très reconnaissante à Monsieur le Professeur P. Nozières de m'avoir initié à la recherche en physique théorique, c'est sous sa direction sure et bienveillante que ce travail a été effectué. Après m'avoir suggéré l'idée de cette thèse, il m'a prodigué tout au long de sa préparation une aide inestimable par ses suggestions et ses conseils clairvoyants ; je tiens à lui exprimer ici ma profonde gratitude.

Ce travail est le fruit d'une collaboration amicale et quotidienne avec le Professeur O. Betbeder-Matibet que je désire tout particulièrement remercier. Elle a participé à toutes les étapes de cette étude ne me refusant jamais son attention. C'est plus d'une fois que ses critiques et sa clarté d'esprit ont été pour moi d'une très grande aide.

J'ai débuté ce travail en collaboration avec le Docteur A. Bastin ; avec une très grande patience et un entrain communicatif il a guidé mes premiers pas dans ce sujet, me faisant bénéficier de ses vastes connaissances théoriques et expérimentales. C'est un plaisir pour moi de le remercier à présent.

Sur le plan expérimental les nombreuses conversations que j'ai eues avec le Professeur I. Solomon m'ont aidé à dégager les idées physiques fondamentales de mes calculs théoriques. Je voudrais l'en remercier très vivement ainsi que J.N. Chazalviel.

Le groupe des théoriciens tout entier m'a donné également un appui très précieux ; à tous ses membres j'exprime mes remerciements.

C'est grâce à Madame Girard et à Mademoiselle Couder que la frappe du manuscrit a été menée à bien, je désire les remercier pour la gentillesse et l'efficacité avec lesquelles elles se sont acquittées de cette tâche.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542715_0007

INTRODUCTION

Ce travail est orienté vers l'étude de l'effet Hall anormal dans les semiconducteurs. A partir d'un calcul très simple en l'absence de collisions, nous avons développé progressivement un traitement fondé sur une méthode de théorie des champs : après avoir formulé le problème du transport en régime quantique (champ magnétique $\vec{B}_o$ fort) pour un gaz d'électrons libres, nous avons étudié l'effet Hall anormal au premier ordre en couplage spin-orbite d'abord pour $\vec{B}_o = 0$ puis pour $\vec{B}_o$ fini. Enfin nous avons abordé le calcul de l'effet Hall anormal en présence d'une aimantation $\vec{M}$ tournante, ce qui correspond aux expériences récentes de Solomon et Chazalviel [1].

Tout ce travail est résumé dans le Chapitre I qui donne une vue d'ensemble des problèmes posés, des méthodes utilisées et des résultats obtenus. Les détails de calcul sont rejetés dans les Chapitres II et III et dans les appendices. Une telle présentation risque d'entraîner quelques répétitions, mais nous avons pensé qu'elle permettait de mieux dégager les points essentiels et leur enchaînement.

CHAPITRE I

DIFFERENTS ASPECTS DE L'EFFET HALL ANORMAL

I. HISTORIQUE

Le travail qui va être exposé est une contribution à la théorie de l'effet Hall anormal dans les semiconducteurs non magnétiques. L'effet Hall anormal qui est la partie du courant transverse dépendant de l'aimantation a d'abord été découvert et étudié dans les matériaux ferromagnétiques sous le nom d'effet Hall "anormal", "extraordinaire" ou "spontané".

Karplus et Luttinger [2] ont les premiers attribué cet effet au couplage spin-orbite qui créant une asymétrie droite gauche du système, engendre un courant perpendiculaire à la fois au champ électrique extérieur $\vec{E}$ et à l'aimantation $\vec{M}$ du système.

Différents types de couplages spin-orbite ont été proposés : un premier modèle [2][3][4][5] est celui d'électrons itinérants interagissant avec des impuretés non magnétiques. Ces porteurs subissent une interaction spin orbite avec le potentiel périodique du réseau (ou le potentiel d'impuretés) ; l'autre modèle tient compte de l'interaction entre les électrons itinérants s et les électrons localisés d [6][7][8]. Nous nous intéressons exclusivement au premier type d'interaction.

En considérant le couplage spin orbite sur le potentiel cristallin et en tenant compte correctement des éléments de matrice interbande de l'interaction électrique et de l'opérateur vitesse, Karplus et Luttinger [2] ont démontré l'existence d'un courant de Hall proportionnel à $\vec{E} \times \vec{M}$. Le coefficient de Hall anormal R_s correspondant variait comme ρ^2 (ρ = résistivité).

Dans une autre approche donnée par Smit [3] le courant transverse était lié à une diffusion asymétrique des porteurs due

au couplage spin orbite sur le potentiel diffuseur. Ce processus de diffusion asymétrique ("skew scattering") produit un coefficient de Hall anormal proportionnel à ρ.

Dans un article fondamental, Luttinger [4] a posé les bases d'un calcul systématique de la conductivité par une théorie de transport quantique. Tenant compte du couplage spin orbite sur le potentiel cristallin et de la diffusion par un potentiel d'impuretés ponctuel, il a montré l'existence des deux types d'effets mentionnés ci-dessus : une contribution au courant transverse indépendante de la diffusion ($R_s \sim \rho^2$) et un terme de diffusion asymétrique qui n'apparaît qu'au-delà de l'approximation de Born, ainsi que l'ont souligné d'autres auteurs [5], et qui donne un coefficient de Hall anormal proportionnel à ρ.

Cependant le formalisme employé par Luttinger est assez compliqué et son travail n'a pas reçu l'attention méritée.

Plus récemment plusieurs auteurs [9][10] se sont attachés à donner une interprétation physique simple des deux types de contributions ci-dessus. Le terme de diffusion asymétrique apparaît dans une équation de transport classique au-delà de l'approximation de Born ; ces auteurs se sont donc efforcés de comprendre le terme non classique qui conduit à $R_s \sim \rho^2$. En particulier Berger [10] interprète ce terme comme le déplacement latéral subi par un électron lors d'une collision, il le calcule en supposant que le couplage spin orbite a lieu avec le potentiel d'impureté. Il suppose que ses conclusions sont encore valables pour un couplage spin orbite sur le potentiel cristallin. Lyo et Holstein [11] ont montré que le déplacement latéral ainsi calculé était identique au terme correspondant de la théorie de Luttinger [4].

Toutes ces théories de l'effet Hall anormal faites pour des matériaux ferromagnétiques sont obscurcies par l'extrême complexité de ceux-ci à basse température. La considération de systèmes physiques beaucoup plus simples tel que les semiconducteurs non magnétiques (type III-V) où les spins des électrons sont polarisés, a beaucoup clarifié la situation (Appendice 1),(12)(13)(14). Par une théorie d'équation de transport et en utilisant les fonctions

d'onde exactes de la bande de conduction en présence de couplage spin orbite sur la matrice, plusieurs auteurs [13][14] ont calculé le terme de diffusion asymétrique. Cependant cette théorie de l'équation de transport ignore le terme de déplacement latéral qui est dans les semiconducteurs du même ordre de grandeur que celui de diffusion asymétrique.

II. TECHNIQUES EXPERIMENTALES

Avant d'exposer les résultats obtenus dans des publications antérieures, nous allons discuter brièvement de techniques expérimentales possibles pour observer cet effet Hall anormal. Jusqu'à présent nous n'avons pas précisé l'origine de l'aimantation du système. Celle-ci peut être créée soit par pompage optique en excitant en lumière polarisée des photoélectrons à travers le gap, soit en orientant les spins par un champ magnétique constant $\vec{B}o$ (supposé parallèle à Oz). L'intérêt de la première méthode est de pouvoir opérer en l'absence de champ magnétique et donc d'effet Hall anormal, malheureusement le nombre de photoporteurs ainsi excité est faible et le courant anormal sera difficile à détecter. Lorsque les spins sont polarisés par un champ magnétique constant $\vec{B}_o$ le problème consiste à séparer l'effet Hall anormal (proportionnel à $\vec{E} \times \vec{M}$) de l'effet Hall normal (proportionnel à $\vec{E} \times \vec{B}_o$) en général beaucoup plus grand. Il s'agit donc de faire varier l'aimantation indépendamment du champ magnétique ; le terme d'effet Hall ordinaire reste constant alors que le terme anormal proportionnel à $\vec{M}$ varie. Deux techniques sont possibles : la première consiste à saturer la raie de résonance : dans une expérience de RPE à la résonance un champ radiofréquence induit des transitions entre les deux niveaux de spin, à puissance suffisamment élevée on peut ainsi égaler les populations des électrons de spin "up" et "down" et donc détruire l'aimantation sans changer $\vec{B}_o$. Cette méthode d'observation n'a pas été mise en oeuvre.

La deuxième méthode est une méthode résonante qui utilise l'apparition près de la résonance d'une aimantation transverse $\vec{M}_1$

(précession de Larmor). Cette aimantation ainsi que le champ électrique $\vec{E}$ oscillent à la fréquence ω ; le terme d'effet Hall anormal proportionnel à $\vec{E} \times \vec{M}_1$ a des composantes de Fourier à $\pm 2\omega$ et 0. On détecte la composante continue. C'est récemment par cette très élégante technique que Chazalviel et Solomon [1] ont observé l'effet Hall anormal dans InSb.

III. CALCUL DE L'EFFET HALL ANORMAL A CHAMP MAGNETIQUE FINI ET SANS COLLISIONS

Nous allons ici étudier l'effet Hall anormal dans des semi-conducteurs III-V (type InSb). La bande de conduction au centre de zone a une symétrie s et est doublement dégénérée. La bande de valence est construite à partir de trois orbitales p dégénérées. Les niveaux d'énergie à $\vec{k} = 0$ sont séparés par couplage spin orbite en un quadruplet (moment angulaire total $J = 3/2$) et un doublet ($J = 1/2$). La situation est décrite sur la figure 1 qui sert à définir les énergies E_g et Δ.

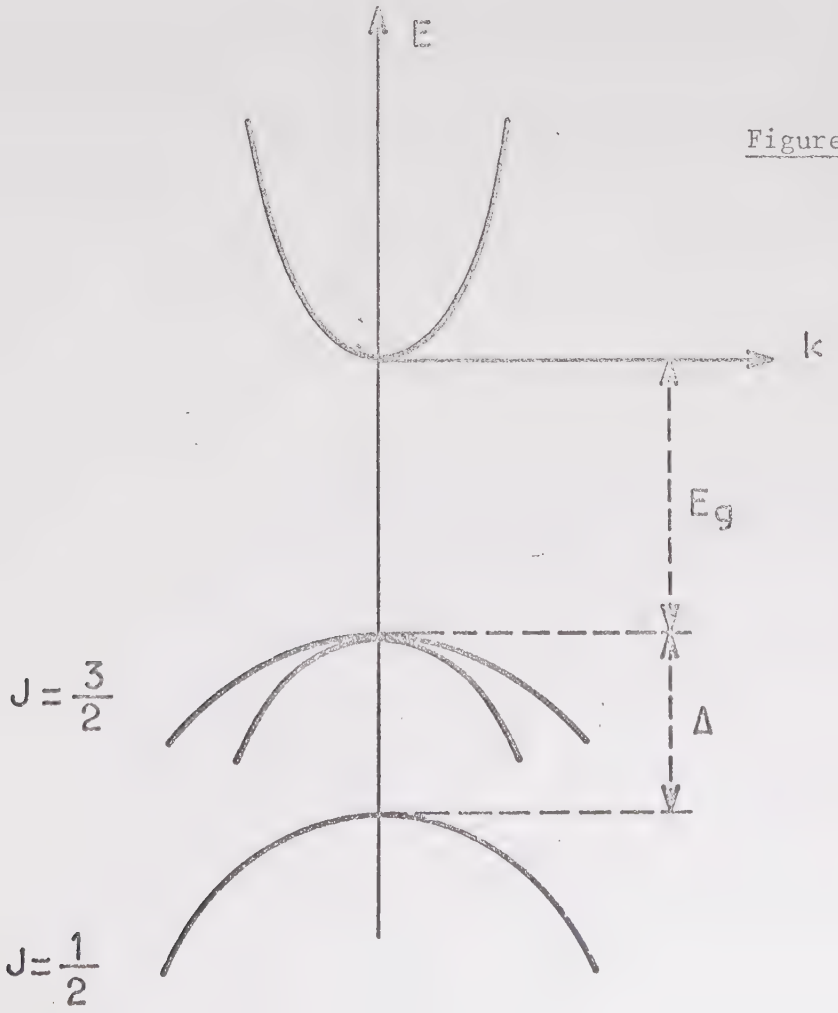


Figure 1

La structure de bande pour un vecteur d'onde $\vec{k}$ fini a été étudiée en détail par Kane [15]. Nous le décrirons dans la représentation de Kohn et Luttinger [16][17] sur la base des fonctions d'onde :

$$\psi_{i\vec{k}} = u_{io}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

où u_{io} est la fonction propre exacte de l'état i à $\vec{k} = 0$. Pour chaque $\vec{k}$ le Hamiltonien est une matrice :

$$H_{ii'}(\vec{k}) = \left(E_i + \frac{k^2}{2m}\right)\delta_{ii'} + \vec{k}.\vec{\pi}_{ii'} + g_o\beta\vec{S}.\vec{B} \qquad (I.1)$$

$$(\hbar = 1)$$

où m est la masse de l'électron libre ; g_o son facteur de Landé et $\vec{S}$ son spin ; $\vec{\Pi}_{ii'}$ est la partie interbande de l'opérateur vitesse

$$\vec{\pi} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} + \frac{1}{2mc^2}\,\vec{S} \times \vec{\nabla}u\right)$$

où u est le potentiel périodique du cristal (on remarque que $\vec{\Pi}$ est impair par réflexion et ne peut pas coupler des états de même parité orbitale par exemple les deux bandes de valence). Dans le modèle de Kane nous ne retiendrons que la partie de $\vec{\Pi}$ qui couple la bande de conduction aux bandes de valence.

Une première approche a consisté à calculer l'effet Hall anormal en présence d'un champ magnétique $\vec{B}_o$ constant parallèle à Oz et en l'absence de collisions. L'échantillon possède une aimantation $\vec{M}$ dont on ne précisera pas l'origine. Le calcul complet est fait dans un modèle à deux bandes dans l'apprendice 1 et a été détaillé par Noëlle Pottier-Fayet dans sa thèse de 3ème cycle [11]. L'échantillon est soumis à un champ électrique $\vec{E}$ exp-iωt parallèle à l'axe x, la perturbation correspondante au Hamiltonien est

$$H_1 = \frac{e}{c}\vec{A}.\vec{j} = \frac{e}{i\omega}\vec{E}.\vec{j}\ \exp -i\omega t$$

$\vec{A}$ étant le potentiel vecteur, - e la charge de l'électron et $\vec{j}$ l'opérateur courant :

$$\vec{j} = \frac{\vec{k}}{m} + \vec{\pi} \qquad (I.2)$$

$\vec{\tilde{k}}$ est le vecteur d'onde de l'électron en présence de champ magnétique

$$\vec{\tilde{k}} = \vec{k} + \frac{e\vec{A}}{c}$$

On suppose l'énergie des électrons et la fréquence ω faibles devant le gap E_g séparant les deux bandes $\omega \sim \frac{\hbar^2}{2m} \ll E_g$.

Le tenseur conductivité calculé par une méthode de réponse linéaire s'écrit

$$\sigma_{xx} = \frac{2ie^2}{\omega} \sum_{\nu \neq \mu} \frac{\omega_{\nu\mu}}{\omega^2 - \omega_{\nu\mu}^2} j_{\mu\nu}^x \, j_{\nu\mu}^x + \frac{iNe^2}{m\omega} \qquad \text{(I.3)}$$

$\sigma_g = \frac{iNe^2}{m\omega}$ est le terme de jauge.

$$\sigma_{xy} = ie^2 \sum_{\nu \neq \mu} \frac{j_{\mu\nu}^x \, j_{\nu\mu}^y - j_{\mu\nu}^y \, j_{\nu\mu}^x}{\omega^2 - \omega_{\nu\mu}^2} \qquad \text{(I.4)}$$

où μ et ν sont les fonctions d'onde exactes du Hamiltonien (I-1).

En l'absence de champ magnétique $\vec{j}_{\mu\nu}$ couple seulement les états qui ont même vecteur d'onde et qui appartiennent à des bandes différentes, $\omega_{\mu\nu}$ est alors l'énergie du gap. D'après (I-2) (I-3) et (I-4) on obtient

$$\sigma_{xx} = \frac{iNe^2}{m\omega}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{mE_1} \left(g^* - g_o\right) M^z$$

E_1 étant une énergie de l'ordre du gap et M^z l'aimantation suivant z définie par $M^z = \frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{2}$ ($N_{\uparrow,\downarrow}$ = nombre d'électrons de spin "up" ou "down").

La masse effective m^* et le facteur de Landé effectif g^* sont définis par les relations

$$\sum_\nu \frac{\pi_{cv}^\alpha \, \pi_{vc}^\alpha}{E_\nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^*} - \frac{1}{m}\right) \qquad \text{(I.6a)}$$

$$\sum_{v} \frac{\pi^{\alpha}_{cv} \pi^{\beta}_{vc}}{E_v} = -\frac{i}{2m} (g^* - g_o)\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, S^{\gamma} \qquad \text{(I.6b)}$$

(α, β, γ = x, y, z) c est l'indice de la bande de conduction v celui de la bande de valence.

Si le champ magnétique $\vec{B}_o$ est fini le problème est beaucoup moins simple. La structure de bande est profondément altérée par l'existence de niveaux de Landau discrets. Les éléments de matrice non diagonaux de $\vec{j}$ dans (I-3) et (I-4) font intervenir à présent les transitions entre différents niveaux de Landau d'une même bande ainsi que les termes interbandes usuels.

Pour des champs magnétiques faibles tels que $\omega_c^* << Eg$ (ω_c^* = fréquence cyclotron $\omega_c^* = \frac{eB_o}{m^* c}$) la structure des niveaux de Landau est négligeable comparée à la structure de bande et les termes interbandes resteront inchangés. Le problème essentiel sera d'évaluer les nouveaux termes intrabandes et leur contribution à la conductivité.

Par une méthode d'équation du mouvement et en séparant le courant en partie diagonale et non diagonale dans la base de Kohn et Luttinger nous avons montré qu'à fréquence nulle il n'y avait pas de correction due au couplage spin orbite au tenseur conductivité.

Pour calculer celui-ci à fréquence finie nous avons procédé par approximation. Nous cherchons σ à l'ordre zéro en k ; dans les termes intrabandes de (I-4) le dénominateur est d'ordre k^4 car $\omega \sim \omega_c$ et la fréquence cyclotron est du même ordre que l'énergie cinétique transverse de l'électron. Dans ces conditions le numérateur devra être évalué à l'ordre k^4 c'est-à-dire $\vec{j}_{\mu\nu}$ à l'ordre k^3 et $\omega_{\nu\mu}$ à l'ordre k^4. Il faut donc connaître avec précision les fonctions d'onde exactes μ,ν du Hamiltonien en bas de bande. Pour cela, on cherche une transformation canonique qui diagonalise le Hamiltonien (I-1) à l'ordre requis. Les éléments

de matrice $\vec{j}_{\mu\nu}$ sont alors les éléments de matrice de l'opérateur transformé $\vec{\tilde{j}}$ dans la base de Kohn et Luttinger.

Au deuxième ordre en k on retrouve le Hamiltonien effectif usuel qui s'écrit pour la bande de conduction

$$\tilde{H}_c = \frac{k^2}{2m^*} + g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o \qquad (I.7)$$

Le tenseur conductivité se réduit à la formule de Drude Zener

$$\sigma_{xx} = -\frac{iNe^2}{m^*\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^{*2} - \omega^2} \qquad (I.8a)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ne^2}{m^*\omega_c^*} \frac{\omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2} - \omega^2} \qquad (I.8b)$$

Au quatrième ordre en k et en négligeant des corrections de non parabolicité des bandes, on obtient des corrections d'ordre $\frac{k^2}{mE_1}$ au Hamiltonien effectif (I-7). Celui-ci s'écrit

$$\tilde{H}_c = \frac{k^2}{2m^*} + g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o + \gamma\, k^2 \vec{S}.\vec{B}_o + \delta\, (\vec{k}.\vec{S})\ (\vec{k}.\vec{B}_o) \qquad (I.9)$$

(les coefficients γ et δ étant d'ordre $\frac{1}{Eg}$)
On peut remarquer que d'après l'appendice 1 (3-8 et 3-9) le rapport $\frac{\gamma}{\delta}$ est d'ordre $\frac{m}{m^*}$ c'est-à-dire très grand dans le cas de InSb ($m^* = 0{,}013\ m$).

Le troisième terme de (I-9) peut être considéré soit comme une dépendance en $\vec{k}$ du facteur de Landé soit comme une correction à la masse effective : le système agit comme s'il avait une masse effective m^{**} dépendant du spin. Ceci conduit à des fréquences cyclotron $\omega_c^{**}{}_{\uparrow,\downarrow}$ différentes pour les deux directions de spin.

Le quatrième terme de (I-9) permet des résonances couplées entre niveaux de Landau et de spin.

En calculant $\vec{\tilde{j}}$ on obtient pour la conductivité transverse

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{m^{**}\omega c^{*}}\left\{\frac{N_{\uparrow}\omega_{c\uparrow}^{**2}}{\omega_{c\uparrow}^{**2}-\omega^2}+\frac{N_{\downarrow}\omega_{c\downarrow}^{**2}}{\omega_{c\downarrow}^{**2}-\omega^2}\right\}+\frac{e^2(g^{*}-g_o)}{mE_1}\frac{M^2\omega^2}{\omega^2-\omega_c^{*2}} \qquad (I.10)$$

On retrouve qu'à la limite $\omega \to 0$ σ_{xy} se réduit à l'effet Hall normal alors que pour $\omega_c^{*} = 0$ on retrouve le résultat (I-5).

L'expression (I-10) montre l'apparition en présence d'un champ électrique oscillant d'un effet Hall anormal lié à l'existence d'un facteur de Landé effectif $g^{*} \neq g_o$. C'est donc à travers le couplage spin orbite qu'apparaît une dépendance en aimantation de la conductivité.

Dans la pratique, il est essentiel de connaître l'influence des collisions sur (I-10). Le formalisme de la réponse linéaire est mal adapté à ce problème ; nous avons cherché à le formuler par une méthode de fonctions de Green.

II. CALCUL DU TENSEUR CONDUCTIVITE A CHAMP MAGNETIQUE FINI ET A L'ORDRE LE PLUS BAS EN COUPLAGE SPIN ORBITE

Nous avons d'abord calculé la conductivité en présence d'un champ magnétique en ne tenant compte du couplage spin orbite qu'à travers la masse effective et le facteur de Landé effectif. Nous nous sommes placés à fréquence nulle en présence de collisions sur des impuretés. Le calcul a été effectué en traitant le potentiel d'impuretés comme une perturbation et en développant la fonction de Green à un électron sur la base du Hamiltonien non perturbé, en présence d'un champ magnétique, donné par (I-7). Nous avons mis en évidence un effet oscillant lié à la quantification des niveaux et qui n'apparaît qu'au-delà de l'approximation de Born. Ce travail a constitué une partie de la thèse de Doctorat d'état d'A. Bastin et figure en appendice 2. Nous allons en retracer les grandes lignes.

Rappelons que les fonctions propres du Hamiltonien non perturbé

(I-7) s'écrivent si on choisit la jauge de Landau ($\vec{A} = (o, B_o x, o)$)

$$\psi_{n\, k^y k^z}(\vec{r}) = \Phi_n\left(x + \frac{k^y}{m^* \omega_c^*}\right) \exp i(k^y y + k^z z)$$

l'énergie correspondante à l'état $|N\rangle = |nk^y k^z\rangle$ est

$$E_{nkz} = (n + \frac{1}{2})\, \omega_c^* + \frac{k^{z2}}{2m^*}$$

où Φ_n est la $n^{è}$ fonction propre de l'oscillateur harmonique à une dimension. La densité d'état $\rho(\varepsilon)$ est une fonction oscillante de ω_c^*.

$$\rho(\varepsilon) = \frac{(m^*)^{3/2} \omega_c^*}{\sqrt{2}\, \pi^2} \sum_n (\varepsilon - (n+\tfrac{1}{2})\omega_c^*)^{-\frac{1}{2}} \equiv \sum_n \rho_n(\varepsilon) \qquad (I.11)$$

Nous considérons un semiconducteur dégénéré près de la température nulle. ($T \to 0$). Nous supposerons que dans ces conditions les phénomènes de transport sont contrôlés par des impuretés sans spin, indépendantes ét réparties au hasard. Si $V(r)$ est le potentiel d'impuretés et n_i la densité d'impuretés on a

$$V(r) = \sum_{j=1}^{n_i} v(r - r_j) \qquad (I.12)$$

Nous choisissons un potentiel ponctuel, c'est-à-dire

$$v(r) = V\, \delta(r) \qquad (I.13)$$

La perturbation due au champ électrique est proportionnelle au courant et d'après la théorie de Kubo de la réponse linéaire la conductivité électrique est reliée à la fonction de corrélation courant courant $S_{\alpha\beta}$ par

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{iNe^2}{m^* \omega}\, \delta_{\alpha\beta} + \frac{e^2}{i\omega}\, S_{\alpha\beta}(\omega) \qquad (I.14)$$

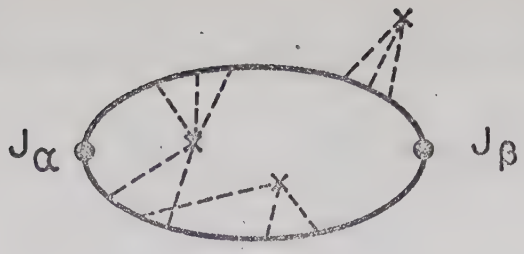
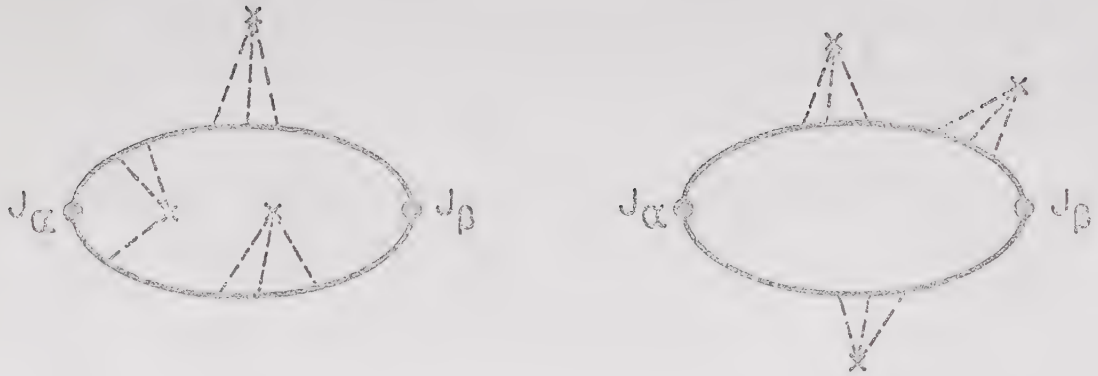


Figure 2

Fonction de corrélation courant-courant



_a_ _b_

Figure 3

Diagrammes contribuant à $S_{\alpha\beta}$ (calcul ordinaire)

Figure 4

Diagrammes pour la matrice t

Le premier terme de (I-14) tient compte du terme de jauge, $S_{\alpha\beta}$ peut être développé en puissances de V et est représenté par tous les diagrammes du type de celui de la figure 2. Les points représentent les vertex vitesse, chaque croix représente un centre diffuseur r_i, les lignes pleines correspondent aux propagateurs non perturbés.

$$G_o(\varepsilon) = \frac{1}{\tilde{H}_c - \varepsilon} \tag{I.15}$$

On définit la quantité

$$L_{\alpha\beta}(z,z') = \overline{Tr(j^{\alpha}G(z)\ j^{\beta}G(z'))} \tag{I.16}$$

où G(z) est le prolongement analytique de la fonction de Green à une particule en présence d'impuretés dans le plan complexe. La barre signifie qu'on prend la moyenne de tout le produit sur la position des impuretés supposées non corrélées.

La fonction de corrélation retardée $S_{\alpha\beta}$ peut être reliée à $L_{\alpha\beta}(z, z')$ par une procédure de prolongement analytique. Elle est donnée par

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon)d\varepsilon \{L_{\beta\alpha}(\varepsilon^{+},\varepsilon^{++}) - L_{\beta\alpha}(\varepsilon^{-},\varepsilon^{++}) + L_{\beta\alpha}(\varepsilon^{--},\varepsilon^{+}) - L_{\beta\alpha}(\varepsilon^{--},\varepsilon^{-})\} \tag{I.17}$$

où $f(\varepsilon)$ est la fonction de Fermi Dirac, $\varepsilon^{\pm}$, ε^{++}, ε^{--} sont des abréviations pour

$\varepsilon^{\pm} = \varepsilon \pm i\eta$

$\varepsilon^{\pm\pm} = \varepsilon \pm \omega \pm i\eta$ (η est un infinitisimal positif)

Nous voulons calculer la conductivité à tous ordres en $\frac{n_i}{N}$. On doit alors sommer tous les diagrammes de la figure 2. Ceci est impossible. La procédure la plus simple consiste à garder tous les diagrammes où un nombre arbitraire de centres diffuseurs apparaissent

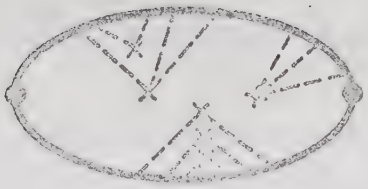


Figure 5

Diagramme contribuant à $S_{\alpha\beta}$ (calcul selfconsistent)

-a-

Figure 6

-b-

Deux diagrammes contribuant à $S_{\alpha\beta}$ au 2ème ordre en densité d'impuretés

mais où les collisions avec différentes impuretés n'interfèrent pas (figure 3).

On montre dans l'appendice 2 que les diagrammes (a) où la même impureté agit avec les deux lignes de propagateur sont nuls (il n'y a pas de correction de vertex). Cette simplification est due au choix du potentiel ponctuel ; en terme d'équation de transport il n'y a pas de diffusion "in". Donc dans (I-17) on peut faire la moyenne sur les impuretés séparément sur chaque propagateur. Ceux-ci obéissent à l'équation de Dyson.

$$G = G_o - n_i G_o t G \tag{I.18}$$

où la matrice t est donnée par les diagrammes de la figure 4 où les propagateurs sont des propagateurs G_o.

Les diagrammes de la figure 4 rendent à la fois compte de la diffusion multiple à tous les ordres sur chaque impureté et des collisions successives sur plusieurs impuretés responsables de l'élargissement des niveaux.

Il est avantageux pour la simplicité des calculs d'inclure dans la matrice t de l'équation (I-18) des propagateurs renormalisés G au lieu des propagateurs non perturbés G_o. Les diagrammes dont on tient compte sont alors ceux de la figure 5. Ce sont tous ceux où deux lignes d'interaction ne se coupent pas.

Les propagateurs sont donnés par (I-18) et la matrice t par

$$t^+(\varepsilon) = \frac{V}{1+VK^+(\varepsilon)} \tag{I.19}$$

avec

$$K^+(\varepsilon) = \mathrm{Tr}\, C^+(\varepsilon) = \int \frac{\rho(\varepsilon')d\varepsilon'}{\varepsilon'-\varepsilon+i\Gamma(\varepsilon)} \tag{I.20}$$

(I-18), (I-19), (I-20) constituent un ensemble d'équations self consistentes qu'il faut résoudre pour donner une évaluation numérique des résultats.

Avant de donner les résultats du calcul nous allons discuter l'ordre de grandeur des termes négligés. Par exemple, si on examine les diagrammes de la figure 6 notre calcul retient le diagramme (a) et non le diagramme (b).

D'après l'appendice 2 le diagramme b est d'ordre $\frac{\Gamma}{\mu}$ par rapport au diagramme a avec

$$\Gamma = -2n_i \mathrm{Im}\, t \simeq \frac{1}{\tau} \tag{I-21}$$

μ étant le niveau de Fermi. Notre calcul suppose donc $\frac{\Gamma}{\mu} \ll 1$ (30).

Si $\Gamma \sim \mu$, la nature des états à une particule est profondément modifiée, et le calcul de σ devient impossible. En fait, le matériau se comporte alors comme un corps amorphe : il apparaît très certainement un gap de mobilité, un problème très compliqué qui sort très largement du cadre de cette étude.

D'après l'appendice 2, le tenseur conductivité s'écrit à T = 0 et à fréquence nulle :

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{m^* \omega_c^*} \frac{\omega_c^* \Gamma}{\Gamma^2 + \omega_c^{*2}} (C + D) \qquad \text{(I.22a)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-e^2}{m^* \omega_c^*} \left(D \frac{\omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2} - C \frac{\Gamma^2}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2} \right) \qquad \text{(I.22b)}$$

où

$$D = N + \frac{2ni}{\pi} \left(A\mathrm{tg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) \qquad \text{(I.23a)}$$

$$C = \frac{\mu K_2}{\pi} - \frac{3N}{2} + \frac{ni}{2\pi} \left(3A\mathrm{tg}\lambda - \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)(1+VK_1)} \right) \qquad \text{(I.23b)}$$

avec $K^+ = K_1 + iK_2$

et $\lambda = \frac{VK_2}{1+VK_1}$

Nous mettons ainsi en évidence une correction à la théorie de Drude Zener qui aurait prédit

$$\sigma_{xx} = \frac{Ne^2}{m^* \omega_c^*} \frac{\omega_c^* \Gamma}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2} \qquad \text{(I.24a)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-Ne^2}{m^* \omega_c^*} \frac{\omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2} \qquad \text{(I.24b)}$$

A la limite $\omega_c^*/\Gamma \to \infty$ (1er ordre en densité d'impuretés). Ces formules deviennent

$$\sigma_{xx} = \frac{Ne^2}{m^* \omega_c^*} \frac{n_i}{N} \frac{2}{\pi} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \sum_n (2n+1) \frac{\rho_n(\mu)}{\rho(\mu)}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{Ne^2}{m^* \omega_c^*} \left[-1 + \frac{2}{\pi} \frac{n_i}{N} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \mathrm{Atg}\lambda \right) \right]$$

On trouve sur σ_{xx} les oscillations Schubnikov de Haas usuelles et sur σ_{xy} une correction à l'effet Hall normal. Nous remarquons que σ_{xx} est d'ordre λ^2 dans la limite des faibles potentiels ($\lambda \to 0$) et que la correction à σ_{xy} est d'ordre λ^3 et n'apparaît qu'au-delà de l'approximation de Born. Elle est linéaire en n_i c'est-à-dire en Γ alors que (I-23) prédirait un écart en Γ^2. Elle peut être considérée comme un effet Hall anormal provenant du moment orbital (plutôt que du spin), il n'apparaît que si l'on tient compte de la courbure des trajectoires, c'est-à-dire si on va au-delà de l'approximation de Born.

A la limite $\frac{\omega_c^*}{\Gamma} \to 0$ on retrouve $\sigma_{xy} = 0$. C'est dans cette limite que nous allons nous placer à présent et chercher un effet Hall anormal lié au couplage spin orbite. Ce travail fait l'objet de l'appendice 3.

V. CALCUL PAR LES FONCTIONS DE GREEN DE L'EFFET HALL ANORMAL EN L'ABSENCE DE CHAMP MAGNETIQUE

a) Formulation du problème

Le but de cet article était de formuler très simplement le calcul exact de l'effet Hall anormal ce qui permet de mettre clairement en évidence les deux types de contribution discutés dans le paragraphe I (effet de déplacement et "skew" scattering). Les résultats obtenus sont essentiellement les mêmes que dans l'article de Luttinger [4] à part quelques généralisations (le traitement des collisions n'est pas limité à l'ordre le plus bas d'un développement de Born et la conductivité est calculée à fréquence finie).

Le semiconducteur étudié est de type InSb, les électrons sont diffusés par un potentiel d'impuretés qui comprend une partie scalaire et une partie spin orbite

$$V(r-ri) + \vec{L}.\vec{S}\ \lambda(r-ri)$$

On montre dans l'appendice 3 que les éléments de matrice sur la base de Kohn et Luttinger d'un potentiel V(r) variant lentement sur l'échelle atomique mais ponctuel à l'échelle du vecteur d'onde d'un électron (k^{-1}) sont diagonaux et s'écrivent

$$\langle i\vec{k}|\ V(r)\ |i'\vec{k}'\rangle = V\ \delta_{ii'} \qquad (I.25)$$

On y montre aussi que la partie spin orbite du potentiel est diagonale dans la base de Kohn et Luttinger (c'est-à-dire ne couple pas les bandes entre elles) et que contrairement à V(r) elle n'agit que sur la bande de valence. C'est parce que $\lambda(r)$ est très localisé que ses éléments de matrice ne dépendent pas de $\vec{k}$ et $\vec{k}'$.

Nous supposons comme dans le paragraphe III que la densité de porteurs dans la bande de conduction est faible, c'est-à-dire que leur énergie de Fermi μ est faible devant le gap E_g (pour un système non dégénéré nous supposons de même $kT<<E_g$). Les effets de non parabolicité des bandes sont donc faibles et notre calcul peut être considéré comme un développement en puissance de ε_k/E_g où $\varepsilon_k = \frac{k^2}{2m^*}$ est l'énergie d'un électron de conduction. De même ω et Γ sont supposés très petits devant E_g.

Nous allons voir que la conductivité calculée à l'ordre le plus bas redonne la conductivité d'un gaz d'électrons de masse effective m^*. (Ceci correspond dans le langage du paragraphe III à faire une transformation canonique à l'ordre k^2). Pour avoir de nouveaux résultats, nous allons chercher les corrections du premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ à ces résultats élémentaires (transformation canonique à l'ordre k^4).

De même que dans le paragraphe précédent, nous ne savons effectuer le calcul que si nous supposons $\Gamma<<\mu$, par contre nous ne faisons aucune hypothèse sur le rapport $\frac{\omega}{\Gamma}$.

Nous allons distinguer deux types de corrections à la conductivité, celles qui proviennent des propagateurs et celles qui viennent des vertex.

b) La fonction de Green à une particule et l'amplitude de diffusion

Nous considérons la fonction de Green à une particule

$$G_{ii'}(\vec{k},\varepsilon) = (H_{ii'}(\vec{k}) - \varepsilon)^{-1}$$

où $H_{ii'}(\vec{k})$ est donné par l'expression(I-1) prise à $B_o = 0$. Nous pouvons développer G en puissance du couplage interbande $\vec{k}.\vec{\Pi}$ comme sur la figure 7.

Les points représentent les vertex $\vec{k}.\vec{\Pi}$, les lignes légères le propagateur de la bande de conduction c, les lignes grasses les propagateurs de la bande de valence v. Les excursions dans la bande de valence peuvent être considérées comme une "self énergie" $\sum(\vec{k},\varepsilon)$ sur le propagateur de la bande de conduction G_{cc} (abrégé par G). Soit :

$$G(\vec{k},\varepsilon) = \left(\frac{k^2}{2m} - \varepsilon - \sum(k,\varepsilon)\right)^{-1} \qquad \text{(I.26a)}$$

$$\sum(k,\varepsilon) = \frac{\vec{k}.\vec{\pi}_{cv}\ \vec{k}.\vec{\pi}_{vc}}{E_v + \frac{k^2}{2m} - \varepsilon} \qquad \text{(I.26b)}$$

A l'ordre zéro en ε_k/E_g et ε/E_g le dénominateur de $\sum$ se réduit à E_v. En comparant à (I-6) on voit que G est alors le propagateur à une bande correspondant au Hamiltonien effectif (I-7).

Dans la correction au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ à $\sum$, nous ne gardons que la partie qui dépend du spin (pouvant donner un effet Hall anormal). Celle-ci s'écrit

$$\delta\sum(\vec{k},\varepsilon) = \frac{i(g^*-g_o)}{2mE_l}\ (\varepsilon - \frac{k^2}{2m})\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\ k^\alpha k^\beta S^\gamma$$

figure 7

Développement de G_{cc} en puissances du couplage interbande $\vec{k}.\vec{\Pi}$

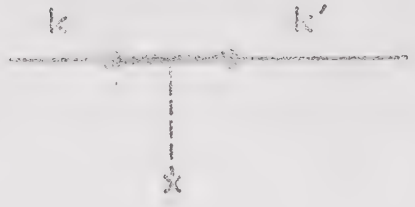


Figure 8

Diagramme donnant l'amplitude de diffusion anormale $W_{\vec{k}\vec{k}'}$

avec $$\frac{1}{E_1} = \frac{2E_g + \Delta}{E_g(Eg+\Delta)}$$

($\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ est le tenseur entièrement antisymétrique).
En l'absence de champ magnétique k^α et k^β commutent donc $\delta\Sigma = 0$ une conclusion qui serait fausse à $\vec{B}_o \neq 0$.

Considérons à présent l'effet d'une impureté localisée à l'origine. Un vertex de diffusion sur une ligne c donne un élément de matrice $V_{kk'} = V$, indépendant du spin et qui correspond à la diffusion usuelle dans un modèle à une bande décrite au paragraphe précédent. A l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$ on peut répéter un tel processus un nombre de fois arbitraire. Par contre, un vertex de diffusion sur une ligne v introduit un facteur supplémentaire $\sim \frac{V}{E_v}$ qui est $<<1$; dans l'optique de notre développement en $\frac{1}{E_g}$ nous devons garder ce processus une fois seulement. On définit ainsi l'amplitude de diffusion anormale $W_{kk'}$, donnée par la figure 8. D'après l'appendice 3

$$W_{kk'} \sim (\vec{k}\times\vec{k}').\vec{S}$$

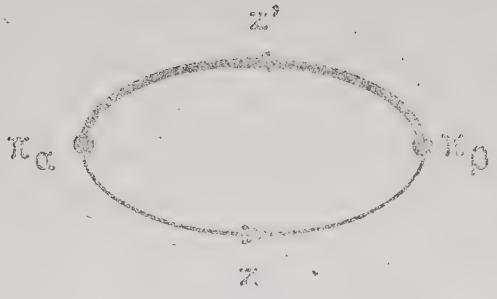
Elle décrit des transitions "spin flip" induites par couplage spin orbite et est reliée au temps de relaxation des spins. Elle disparaît après moyenne sur la position des impuretés (qui revient à faire $\vec{k} = \vec{k}'$).

On voit donc qu'à $B_o = 0$ on n'a pas de corrections en $\frac{1}{E_g}$ aux propagateurs de la bande de conduction ; ils sont donnés par les équations (I-18) (I-19) et (I-20).

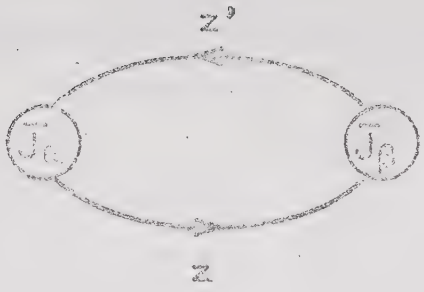
c) Calcul de la conductivité

D'après la discussion précédente il est clair qu'on a deux types de corrections du premier ordre en $\frac{1}{E_g}$. Une première classe vient de la dépendance en moment et en énergie des propagateurs de la bande de valence comme on le voyait déjà dans le calcul de $\delta\Sigma$. Comme la self énergie ne contient pas de corrections de spin, ces dernières ne peuvent apparaître qu'avec des lignes de valence touchant les vertex j^α et/ou j^β.

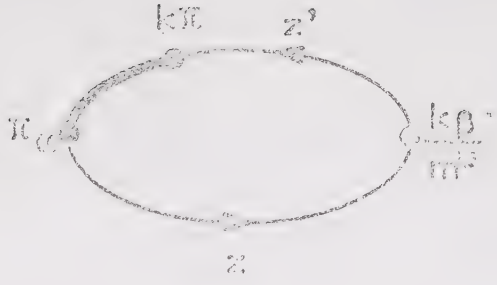
Une seconde classe de corrections est due à la diffusion dans



- a -



- b -



- c -

- d -

Figure 9

Diagrammes contribuant à $S_{\alpha\beta}$ au 1er ordre en $\frac{1}{E_g}$

la bande de valence qui peut induire des transitions "spin flip". Nous allons montrer qu'elle n'affecte pas seulement les propagateurs de la bande de conduction mais aussi les vertex effectifs $\bar{j}^{\alpha}$ et $\bar{j}^{\beta}$. A priori ces deux types de corrections sont du même ordre de grandeur et on doit tenir compte des deux.

Nous allons d'abord considérer les effets de type I, c'est-à-dire où il n'y a pas de vertex de diffusion W. Nous avons montré dans l'appendice 3 que les diagrammes correspondant sont ceux des figures 9a et 9b(plus leurs symétriques), où $\bar{j}^{\alpha}$ est un vertex courant effectif.

A l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$: le diagramme interbande 1 donne une contribution qui revient à remplacer m par m^* dans le terme de jauge ; dans le diagramme intrabande (figure 9a) $\bar{j}^{\alpha}$ se réduit à $\frac{k^{\alpha}}{m^*}$. L'ensemble de ces deux diagrammes redonne la conductivité ordinaire qui s'écrit en tenant compte de la dépendance en énergie de Γ :

$$\sigma^{\circ}_{\alpha\beta} = \frac{-ie^2}{m^*}\ \delta_{\alpha\beta}\int d\varepsilon\ \frac{2\varepsilon}{3}\ (\rho_{\uparrow}(\varepsilon)+\rho_{\downarrow}(\varepsilon))\ \frac{df}{d\varepsilon}\ \frac{1}{\omega+i\Gamma(\varepsilon)} \qquad (I.28)$$

En plus Γ peut dépendre du spin donc $\sigma_{\alpha\beta}^{\circ}$ doit être écrit comme une somme

$$\sigma^{\circ}_{\alpha\beta} = \sigma^{\circ\uparrow}_{\alpha\beta} + \sigma^{\circ\downarrow}_{\alpha\beta}$$

Si $\sigma_{\alpha\beta}^{\uparrow}$ est proportionnel au nombre de porteurs $N_{\uparrow}$, la conductivité totale fait intervenir $N_{\uparrow}+N_{\downarrow}= N$: elle est indépendante de M. Si par contre $\sigma_{\alpha\beta}^{\uparrow}$ est une fonction non linéaire de $N_{\uparrow}$, il apparaît une dépendance en $\vec{M}$: un tel effet n'est pas "anormal" il vient de la distribution statistique des électrons des deux spins et n'a rien à voir avec le couplage spin orbite (il n'affecte ici que σ_{xx} et ne crée par d'effet Hall).

Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$: le vertex courant effectif s'écrit

$$\vec{j}\ (z,z') = \frac{-i(\rho^{*}-\rho_{\Omega})}{2mE_1}\ \omega(\vec{k}\times\vec{S}) \qquad (I.29)$$

(Nous ne gardons de nouveau que la partie dépendant du spin) L'ensemble des contributions des diagrammes (a) et (b) de la figure 9 est proportionnel à σ°_{xx} (y compris le terme de jauge provenant des diagrammes interbande). En combinant (I-28) et (I-29), nous trouvons

$$\sigma^1_{\alpha\beta} + \sigma^2_{\alpha\beta} = -\frac{e^2(g^*-g_o)}{mE_1} \; Tr_\sigma \int d\varepsilon \frac{df}{d\varepsilon} \frac{2\varepsilon}{3} \rho_\sigma(\varepsilon) \frac{\omega}{\omega+i\Gamma_\sigma(\varepsilon)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma \qquad (I.30)$$

où σ est un indice de spin.

Nous nous tournons à présent vers l'autre source de corrections c'est-à-dire la diffusion dans la bande de valence. Celles-ci peuvent apparaître soit comme d'authentiques vertex W (figure 9d) soit comme des contributions supplémentaires aux courants effectifs $\vec{j}^{\alpha}$ (figure 9c).

Contrairement aux corrections de type I tous ces termes sont des corrections de vertex simplement parce que $W_{\vec{k}\vec{k}'}$ se comporte comme $\vec{k} \times \vec{k}'$.

Le diagramme (figure 9c) et son symétrique donne une correction au courant effectif $\vec{j}$ qui s'écrit :

$$\delta\vec{j}\,(z,z') = \frac{i(g^*-g_o)}{2mE_1} (1+\alpha) \; (\vec{k} \times \vec{S}) \; n_i(t(z) - t(z')) \qquad (I.31)$$

Leur contribution à $\sigma_{\alpha\beta}$ est :

$$\sigma^1_{\alpha\beta} = (1+\alpha) \; \sigma^2_{\alpha\beta} = (1+\alpha)\frac{e^2(g^*-g_o)}{mE_1} Tr_\sigma \int d\varepsilon \frac{df}{d\varepsilon} N_\sigma(\varepsilon) \frac{i\Gamma_\sigma(\varepsilon)}{\omega+i\Gamma_\sigma(\varepsilon)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma \qquad (I.32)$$

α est donné par l'expression (22) de l'appendice 3, il tient compte du couplage spin orbite sur l'impureté, $N(\varepsilon)$ est le nombre de particules d'énergie inférieure à ε : $N_\sigma(\varepsilon) = \frac{2}{3} \varepsilon \rho_\sigma(\varepsilon)$.

La contribution des diagrammes (9d) est (cf. appendice 3) :

$$\sigma^4_{\alpha\beta} = -\frac{\pi e^2(g^*-g_o)}{mE_1} V(1+\alpha)\ Tr_\sigma \int d\varepsilon \frac{df}{d\varepsilon} \left[N_\sigma(\varepsilon)\right]^2 \frac{\Gamma_\sigma(\varepsilon)}{\left[\omega+i\Gamma_\sigma(\varepsilon)\right]^2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \$^\gamma \qquad (I.33)$$

d) Discussion des résultats

En l'absence de collisions seul $\sigma^1_{\alpha\beta}$ subsiste. L'effet Hall anormal est alors :

$$\sigma^\circ_{an} = \frac{e^2(g^*-g_o)}{mE_1} M^z$$

On retrouve ainsi le résultat (I-5) du paragraphe III.

Quand on tient compte des collisions, la conductivité anormale possède deux termes. L'un vient de (I-30) et (I-32). Pour Γ constant il s'écrit :

$$\sigma^1_{an}(\omega) = \sigma^\circ_{an} \frac{\omega-i\Gamma(1+\alpha)}{\omega+i\Gamma}$$

Il ne dépend pas seulement de $\omega+i\Gamma$ comme on pourrait le penser. A fréquence nulle, il devient

$$\sigma^1_{an}(0) = -(1+\alpha)\sigma^\circ_{an}$$

Le signe de l'effet Hall anormal change quand on passe de la limite $\Gamma = 0$ à la limite $\omega = 0$. Ce terme conduit à un coefficient de Hall anormal $R_s \sim \rho^2$ il provient donc d'un effet de déplacement.

A ceci il faut ajouter la contribution des diagrammes 4 (donc de l'expression (I-33)) qui donnent un deuxième terme lié au "skew scattering" $\sigma^2_{an}(\omega)$.

Nous allons discuter de l'importance relative de ces deux termes. A température nulle, d'après l'appendice 3

$$\frac{\sigma^2_{an}(0)}{\sigma^2_{an}(0)} \sim \left(\frac{N}{n_i}\frac{\mu}{\Gamma}\right)^{1/2}$$

En général $n_i \sim N$, dans l'hypothèse de notre calcul $\mu >> \Gamma$ donc σ^2_{an} est dominant. Pour avoir σ^1_{an} dominant, on peut se placer dans le cas $N<<n_i$ comme par exemple dans une expérience de photoconductivité mais alors le système n'est plus dégénéré. Dans ce cas

le rapport précédent devient

$$\frac{\sigma^2_{an}(0)}{\sigma^1_{an}(0)} \sim \left(\frac{kT}{\omega_{pi}}\right)^2$$

où $\omega_{pi} = \left|\frac{4\Pi n_i e^2}{m^*}\right|^{1/2}$ est la fréquence de plasma correspondant à la densité n_i des impuretés. La condition $kT \sim \omega_{pi}$ peut très bien être réalisée et σ^1_{an} être alors dominant.

VI. CALCUL DE L'EFFET HALL ANORMAL EN PRESENCE DE CHAMP MAGNETIQUE

Nous voudrions à présent généraliser le calcul du paragraphe précédent au cas où le système est plongé dans un champ magnétique fini. Les expressions (I-32) et (I-33) de l'effet Hall anormal en l'absence de champ magnétique montrent qu'on ne peut pas tenir compte de l'effet des collisions en remplaçant ω par $\omega+i\Gamma$ dans le calcul du paragraphe III (I-10). De même on e pourra pas inclure le champ magnétique en ajoutant ω_c^* aux dénominateurs des expressions (I-32) et (I-33). Il est donc nécessaire de calculer exactement la conductivité à champ magnétique fini.

a) Formulation du problème

Nous allons effectuer ce calcul avec les mêmes hypothèses sur la structure de bande et le potentiel d'impuretés qu'au paragraphe précédent. Nous allons cependant nous restreindre à un potentiel d'impuretés sans couplage spin orbite, nous ne calculerons que la partie continue de la conductivité ($\omega=0$) et nous nous placerons dans la limite $\frac{m^+}{m} \ll 1$ et $g^*/g_o \gg 1$.

Nous allons à présent analyser les différentes contributions à la conductivité transverse. Nous supposerons que l'aimantation des électrons de conduction est créée par un champ magnétique statique $\vec{B}_o$ parallèle à Oz. L'effet Hall anormal (proportionnel à l'aimantation) pourrait être séparé de l'effet Hall ordinaire (indépendant de $\vec{M}$) par saturation de la RPE. Cependant il existe un effet parasite, dépendant de l'aimantation et indépendant du couplage spin orbite, qu'il faudra alors séparer de l'effet Hall

anormal. En effet, créer une aimantation M^z revient à décaler les potentiels chimiques des deux spins, $\mu_\uparrow$ et $\mu_\downarrow$, autrement dit nous considérons deux populations d'électrons indépendantes possédant des potentiels chimiques $\mu_\uparrow$ et $\mu_\downarrow$ différents.

A l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$: l'effet Hall est celui d'un gaz d'électrons de masse effective m^*. (C'est ce qui est calculé au § V (I-22b). L'effet Hall total est la somme des effets Hall des deux populations de spin qui sont entièrement découplées, soit :

$$\sigma_o^{\text{total}} = \sigma_o^{\uparrow} + \sigma_o^{\downarrow}$$

ou plus précisément

$$\sigma_o^{\text{total}} = \sigma_o(N_\uparrow) + \sigma_o(N_\downarrow)$$

A cet ordre on a la même dépendance fonctionnelle des deux termes de σ_o.

Pour un système non aimanté $N_\uparrow = N_\downarrow = N$ et $\sigma_o^{\text{total}} = 2\sigma_o(N)$

Si on aimante le système $N_\uparrow \neq N_\downarrow$ et il apparaît un terme proportionnel au carré de l'aimantation

$$\sigma_I = \left(\frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 \sigma_o}{\partial N^2}$$

On voit ainsi apparaître une correction à l'effet Hall liée à l'aimantation mais qui n'a rien à voir avec le couplage spin orbite. Elle est simplement due au décalage des conductivités des deux populations de spin.

Plusieurs remarques s'imposent : d'abord σ_I dépend de $(N_\uparrow - N_\downarrow)^2$ donc de M^2. Il reste inchangé si on renverse $\vec{M}$; donc à cet ordre en $\frac{1}{E_g}$ on n'a pas d'effets dépendants de $\vec{M}.\vec{B}$. D'autre part, σ_I disparaît si σ_o est proportionnel à N (cas classique). En un sens cet effet est dû au déphasage des oscillations quantiques des deux spins.

L'effet Hall proprement "anormal" n'apparaît qu'au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$. On a alors deux types d'effets possibles linéaires en M.

a) Un courant proportionnel à $\frac{\vec{M}.\vec{B}_o}{B_o^2}(\vec{E}x\vec{B}_o)$. Par exemple dans le calcul du Hamiltonien effectif il apparaît, outre des corrections

de non parabolicité des bandes (proportionnels à $(\frac{k^2}{2m^*})^2$), des termes proportionnels à $\frac{k^2}{2m^*} \vec{S}.\vec{B}_o$ (ainsi que nous l'avons montré au paragraphe III (I-9). Ces derniers termes donnent une correction à la masse effective dépendant du spin. Tout se passe comme si les électrons avaient une masse effective m^{**} différente pour les deux populations de spin. Si on en tient compte dans la conductivité il apparaît un terme lié à l'aimantation :

$$\sigma_{II} \sim m^* \frac{\partial \sigma_o}{\partial m^*} (N_\uparrow - N_\downarrow) . B_o$$

σ_{II} est donc proportionnel à $\vec{M}.\vec{B}_o$. Si $\vec{M}$ est l'aimantation d'équilibre, ces effets sont probablement négligeables devant ceux en M^2 quand ils existent. Pour les voir, il faut pouvoir jouer sur un $\vec{M} \to 0$.

Il semble que de tels effets ne fassent pas appel au couplage spin orbite, le produit $\vec{M}.\vec{B}$. provenant essentiellement du couplage Zeeman qui existe même si $g^* = g_o$. En fait, si l'on fixe $N_\uparrow$ et $N_\downarrow$ il est clair qu'en l'absence de tout couplage spin orbite σ ne peut pas varier si l'on renverse tous les spins ($N_\uparrow$ et $N_\downarrow$ n'interviennent alors que par le principe d'exclusion). La correction σ_{II} doit donc être proportionnelle à g^*-g_o. Dans notre calcul nous avons fait $g_o=0$ pour simplifier et nous trouvons σ_{II} proportionnel à g^*. Si l'on réintroduit g_o on doit vérifier que $\sigma_{II} = 0$ si $g^* = g_o$.

b) Il existe un deuxième type d'effets qui donne un courant proportionnel à $\vec{E} \times \vec{M}$. C'est le même type d'effets qu'à champ nul et il a la même origine : comme dans le paragraphe précédent, il provient des corrections de vertex. C'est le véritable effet Hall anormal (σ_{III}) car il est lié à la direction relative du champ électrique et de l'aimantation.

La nature de σ_{III} est donc différente de celle de σ_{II}. Cependant ces effets sont du même ordre de grandeur et donc difficiles à séparer.

Le but du calcul que nous allons esquisser à présent est d'évaluer σ_{II} et σ_{III} au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$, et de les comparer à σ_I.

b) Calcul de la conductivité

La méthode est la même qu'au paragraphe précédent. Elle consiste à faire un développement au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$, les corrections provenant, soit de la dépendance en énergie des propagateurs de la bande de valence, soit de la diffusion dans la bande de valence. De telles corrections apparaissent d'abord dans le calcul des propagateurs de la bande de conduction. Elles s'annulaient dans le calcul à $B_o=0$, par contre à champ fini il existe une renormalisation de ces propagateurs qui donne une contribution supplémentaire à la conductivité. C'est elle qui est responsable de l'apparition de corrections du type σ_{II}.

Plus précisément, la dépendance en énergie des propagateurs de la bande de valence et la non commutativité des $\vec{k}$ conduisent à un G_c (calculé au premier ordre en spin orbite) différent de G_c° (calculé à l'ordre zéro en spin orbite). On les notera respectivement G et G°. On montre que (II-9)

$$G(m^*,\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}\, G^\circ(\eta m^*,\varepsilon)$$

où G° est le propagateur de la bande de conduction calculé à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$. Les constantes α et η sont données par

$$\alpha = 1 + g^* \beta \frac{\vec{S}.\vec{B}_o}{E_1} \qquad (I.34)$$

$$\eta = 1 + g^* \beta\, \vec{S}.\vec{B}_o \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \qquad (I.35)$$

Nous avons posé

$$\frac{1}{E_1} = \frac{2Eg+\Delta}{Eg(Eg+\Delta)} \qquad (I.36a)$$

et

$$\frac{1}{E_2} = \frac{3Eg^2 + 4Eg\Delta + \Delta^2}{Eg(Eg+\Delta)(3Eg+2\Delta)} \qquad (I.36b)$$

La correction du premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ se traduit par une homothétie sur m^* opposée pour chaque direction de spin.
Ces renormalisations du propagateur donnent une contribution à la conductivité (cf. chapitre II) qui s'écrit

$$\sigma_{II} = Tr_\sigma\left((\eta-1)m^* \frac{\partial\sigma_o}{\partial m^*}\right) \qquad (I.37)$$

D'après l'expression de η on voit que σ_{II} est proportionnel à $g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o$.

Il nous reste à évaluer le deuxième type de contribution, c'est-à-dire les corrections de vertex à la conductivité. Cette fois-ci le calcul est calqué sur celui à champ nul, la classification des diagrammes est la même et nous nous contentons ici de donner les résultats du chapitre II. Nous les donnerons à température nulle ; il est aisé de les généraliser à température finie. Comme au paragraphe V nous supposons $\Gamma << \mu$ ou kT.

Les diagrammes interbande et intrabande de type I donnent (II-18) :

$$\sigma^1_{xy} + \sigma^2_{xy} = -\frac{ig^*\omega}{E_1}\frac{m^*}{m} Tr_\sigma(S^z\sigma^\circ_{xx})$$

Comme pour le cas $\omega_c^* = 0$ leur contribution s'annule à fréquence nulle.

La contribution des diagrammes 9c s'écrit (II-20)

$$\sigma^3_{xy} = -\frac{g^*\omega_c^*}{E_1}\frac{m^*}{m} Tr_\sigma\left(S^z\left(\frac{Ne^2}{m^*\omega_c^*} + \sigma^\circ_{xy}\right)\right)$$

D'après la valeur de σ_{xy}° on voit qu'elle s'annule pour $\Gamma = 0$.

Enfin σ_{xy}^4 s'écrit à des corrections d'ordre $\frac{\Gamma}{\mu}$ près

$$\sigma_{xy}^{4} = \frac{e^2 g^*}{mE_1} \mathrm{Tr}_\sigma \, S^z \{ \frac{\pi V}{\Gamma} (C+N)^2 \frac{(\omega_c^{*2} - \Gamma^2)\Gamma^2}{(\omega_c^{*2} + \Gamma^2)} \}$$

où C est donné par (I-23b).

σ_{III} est l'ensemble des contributions de ces 4 diagrammes

$$\sigma_{III} \equiv \sigma_{xy} + \sigma_{xy}^{2} + \sigma_{xy}^{3} + \sigma_{xy}^{4}$$

c) Discussion des résultats

Pour évaluer σ_I et σ_{II} il faut connaître σ_o. Dans le paragraphe IV nous avons établi une expression de σ_o (I-22b). Nous pouvons remarquer que les corrections d'ordre n_i à C et D n'ont de sens qu'à la limite extrême quantique, $\frac{\omega_c^*}{\Gamma} >> 1$, où λ oscille fortement et peux devenir très grand. Dans le domaine intermédiaire qui nous intéresse ce sont des corrections d'ordre $(\frac{\Gamma}{\mu})^{1/2}$. On peut donc les négliger et écrire

$$\sigma_o = - \frac{e^2}{m^* \omega_c^*} (N \sin^2\theta - C \cos^2\theta)$$

avec $C = \mu\rho(\mu) - \frac{3N}{2}$

σ_{II} est donné par (I-37) et σ_{III} par

$$\sigma_{III} = \frac{-e^2 g^*}{mE_1} \mathrm{Tr}\{S^z (C+N)\cos^2\theta \left[1 - \frac{\pi V}{\Gamma} (C+N)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\right]\}$$

Dans le chapitre II nous avons cherché à quelles conditions l'on pouvait observer σ_{III} par saturation de la RPE. Nous nous sommes placés dans différentes limites mais à chaque fois dans un cas où les oscillations de Γ étaient très amorties et où on pouvait prendre pour σ_o la formule de Drude Zener (I-24b).

Dans le cas non dégénéré ω_c^*, μ, $\Gamma << kT$ il n'y a pas de terme en M^2 : $\sigma_I = 0$.

Pour des petits et des grands angles de Hall l'effet anormal

$(\sigma_{II}+\sigma_{III})$ se réduit au deuxième terme de σ_{III}.

Dans le cas dégénéré $\omega_c^* << kT << \mu$ on peut observer σ_{III} dans les deux limites où σ_I s'annule, c'est-à-dire à $\omega_c^*/\Gamma \to 0$ (cas à champ nul) ou pour $\omega_c^*/\Gamma >> 1$ alors $\sigma_o = -\frac{Ne^2}{m^* \omega_c^*}$ est indépendant de $\vec{M}$.

Dans le cas dégénéré "quantique" $kT << \omega_c^* << \mu$ σ_{III} est dominant lorsque $\frac{\omega_c^*}{\Gamma} \to 0$.

Tous ces résultats sont détaillés au chapitre II.

VII. CALCUL DE L'EFFET HALL ANORMAL DANS LE CAS D'UNE AIMANTATION RESONANTE

Tous les calculs précédents ont été faits pour une aimantation $\vec{M}$ stationnaire ce qui n'est pas le cas de l'expérience réalisée par Chazalviel et Solomon [1]. En effet ils utilisent une méthode résonante où l'aimantation précesse autour du champ magnétique statique $\vec{B}_o$. Dans le cas où cette aimantation précesse lentement c'est-à-dire à la limite $\omega_c^*/\Gamma << 1$ le calcul statique du paragraphe précédent est suffisant. C'est le cas des expériences actuelles. Cependant il est intéressant de se demander si cet effet subsiste dans la limite inverse $\omega_c^*/\Gamma >> 1$ (c'est-à-dire en l'absence de collisions) : est-il lié à l'existence de collisions ou non ?

Pour répondre à cette question, nous avons terminé cette étude en calculant le courant continu dans une expérience résonante en l'absence de collisions (chapitre III). Dans cette dernière partie nous avons abandonné le formalisme de la théorie des champs et nous avons employé la méthode très simple suivante : à partir du vertex courant $-e\vec{\Pi}$ nous avons construit comme au chapitre II un vertex intrabande effectif (III-11) :

$$\vec{J}(\omega) = -e\frac{\vec{k}}{m^{***}} + ig^*\frac{\omega e}{2mE_1}(\vec{k} \times \vec{S}) \qquad (I.38)$$

(la partie interbande du courant restant égale à $-e\vec{\Pi}$).

Nous avons ensuite calculé la perturbation effective produite par le champ oscillant $(\vec{E}, \vec{B})$; celle-ci comprend une partie interbande

égale à $\frac{e}{c}\vec{\Pi}.\vec{A}_1$ et une partie intrabande qui s'écrit :

$$h_1 = \frac{e}{c}\ \vec{A}_1.\ \frac{\vec{k}}{m^{**}} + g^{*}\beta\ \vec{S}.\vec{B}' \qquad \text{(I.39)}$$

D'après(I-39) nous voyons qu'au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ la masse effective devient m^{**} et le champ magnétique $\vec{B}$ est remplacé par $\vec{B}'$ tel que :

$$\vec{B}' = \vec{B} + c\frac{\vec{E}x\vec{k}}{E_1}$$

Après avoir montré qu'au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ la susceptibilité magnétique n'est pas modifiée par ce champ magnétique effectif. $\vec{B}'$nous avons utilisé ces vertex effectifs (I-38) et (I-39) pour calculer le courant de Hall anormal par une méthode de Kubo au deuxième ordre.

Le même résultat peut s'obtenir par une méthode d'équation de mouvement. Nous avons alors décrit la perturbation en fonction d'un champ électrique effectif $\vec{E}'$:

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{g^{*}}{2E_1}\ \frac{m^{*}}{m}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\vec{M} \times \vec{E})$$

Le Hamiltonien effectif s'écrit alors

$$H_{ef} = \frac{k^2}{2m^{**}} + g^{*}\beta\ \vec{S}.\vec{B} + e\ \vec{E}'.\vec{r}$$

Nous avons distingué deux contributions différentes au courant anormal qui proviennent des deux termes de l'équation (I-38). Nous dénotons ces contributions $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$: il est aisé de montrer que $\vec{J}_1$ obéit à la même équation du mouvement qu'un électron libre de masse effective m^{**} soumis à un champ effectif $\vec{E}'$ et que $\vec{J}_2$ s'écrit

$$\vec{J}_2 = \frac{g^{*}}{2E_1}\ \frac{m^{*}}{m}\ \frac{\partial}{\partial t}\ (\vec{J}_o \times \vec{M})$$

($\vec{J}_o$ étant le courant $\vec{J}_1$ calculé à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$)

Nous ne donnerons pas plus de détails sur le calcul explicite du courant, nous allons simplement mentionner les résultats obtenus.

Nous avons à la fois calculé le courant continu et le courant de fréquence 2ω, mais nous ne donnerons ici que les expressions du courant continu. Nous nous sommes placés dans deux géométries différentes. La première est celle de la référence (1) où le champ électrique est parallèle à Oz (c'est-à-dire à $\vec{B}_o$) et le courant est mesuré perpendiculairement à Oz. Dans ce cas le courant continu est nul ; le courant observé expérimentalement est vraiment dû à l'existence de collisions. Cette situation est à comparer avec l'effet Hall anormal dans le cas d'une aimantation statique, pour $\omega_c^* \neq 0$ et ω et $\Gamma = 0$. En effet d'après (I-10), le courant anormal s'annule dans ce cas.

Dans la deuxième géométrie envisagée, le champ électrique est perpendiculaire à Oz et le courant est mesuré parallèlement à Oz. Dans ce cas on obtient un courant non nul qui s'écrit pour $\vec{E}$ parallèle à Oy

$$J_1^z = - \frac{e^2 g^*}{2mE_1} M^x E^y$$

Il resterait bien sûr à inclure les collisions dans ce calcul, ceci paraît compliqué et nous nous sommes restreints aux cas limites $\omega_c^*/\Gamma \to 0$ et $\omega_c^*/\Gamma \to \infty$.

CHAPITRE II

CALCUL DE L'EFFET HALL ANORMAL EN PRESENCE DE CHAMP MAGNETIQUE

Dans ce chapitre, nous généraliserons le calcul de l'effet Hall anormal au cas d'un système plongé dans un champ magnétique statique $\vec{B}_o$; comme en l'absence de champ cet effet n'apparaît qu'au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$. La méthode est très proche du cas $\vec{B}_o=0$. Cependant ici il nous faudra tenir compte non seulement des corrections de type I (dues à la dépendance en énergie du propagateur de la bande de valence) et des corrections de type II (dues à la diffusion par les impuretés dans la bande de valence) mais aussi des corrections de type 0 provenant de la renormalisation de la masse qui dépendra alors du spin. Nous serons amenés à définir correctement le nombre de particules.

Nous donnerons l'expression de la conductivité à l'ordre zéro et au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ et nous discuterons de la possibilité d'observer l'effet Hall anormal par saturation de la RPE.

A. LA FONCTION DE GREEN A UNE PARTICULE

Dans ce qui suit nous nous placerons dans la limite $\frac{1}{m^*}>>\frac{1}{m}$ et $g^*>>g_o$ (Dans le cas de InSb $\frac{m^*}{m}$ = 0,013 et g^* = 50). Dans cette limite nous prendrons $\frac{1}{m} = g_o = 0$.

Le développement en puissances de $\vec{k}\vec{\Pi}$ de la fonction de Green de la bande de conduction G_c (notée G) conduit à $G^{-1}=-\varepsilon-\sum(k,\varepsilon)$ où la self énergie $\sum(k,\varepsilon)$ vaut en l'absence d'impuretés

$$\sum(k,\varepsilon) = \sum_v \vec{k}.\vec{\Pi}_{cv} \frac{1}{E_v-\varepsilon} \vec{k}\,\vec{\Pi}_{vc}$$

A l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$, G° s'écrit

$$G^{\circ -1}(k,\varepsilon) = H_{ef} - \varepsilon = \frac{k^2}{2m^*} + g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o - \varepsilon$$

m^* et g^* sont définis par (I-6).
A l'ordre auquel nous travaillons, les deux directions de spin contribuent séparément à la conductivité. Pour chacune nous pouvons faire sauter le terme Zeeman en l'incorporant dans le potentiel chimique. Plus précisément nous posons :

$$\begin{aligned} \varepsilon - g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o &= \varepsilon'_\sigma \\ \mu - g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o &= \mu'_\sigma \end{aligned} \qquad \text{(II-1)}$$

(Nous omettrons les indices σ, étant entendu que le décalage de ε et μ est opposé pour les deux spins). Le facteur statistique $f(\varepsilon-\mu)$ devient $f(\varepsilon'_\sigma - \mu'_\sigma)$, μ'_σ étant en fin de compte ajusté pour avoir la valeur voulue du nombre de particules N_σ, sans tenir compte de l'énergie Zeeman.

Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ en utilisant les éléments de matrice de $\vec{\Pi}$ (voir appendice 3 (6)) et la relation

$$\{k^\alpha, k^\beta\} = -\frac{ie}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_o^\gamma \qquad \text{(II-2)}$$

on obtient :

$$G^{-1}(\vec{k},\varepsilon) = \frac{k^2}{2m^*} + g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o - \varepsilon\left(1 + \frac{k^2}{2m^* E_2} + g^* \beta \frac{\vec{S}.\vec{B}_o}{E_1}\right)$$

E_1 et E_2 sont donnés par (I-36).
On effectue le changement d'origine $\varepsilon \to \varepsilon'$ on obtient :

$$G^{-1}(k,\varepsilon') = \gamma \frac{k^2}{2m^*} - \alpha\varepsilon' - \frac{k^2}{2mE_2} - \frac{1}{E_1}(g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o)^2 \qquad \text{(II-3)}$$

avec $$\alpha = 1 + g^* \beta \frac{\vec{S}.\vec{B}_o}{E_1} \qquad \text{(II-4a)}$$

$$\gamma = 1 - g^* \beta \frac{\vec{S}.\vec{B}_o}{E_2} \qquad \text{(II-4b)}$$

Le dernier terme de (II-3) est une constante sans intérêt qu'on peut de nouveau absorber dans le potentiel chimique μ.
Le terme $\frac{k^2}{2m^* E_2} \varepsilon'$ de (II-3) donne un effet de non parabolicité indépendant du spin. Ce terme donnera une correction du premier ordre en spin orbite à σ_I qu'on négligera.
Il reste alors :

$$G(m^*, \varepsilon') = G^\circ\left(\frac{m^*}{\gamma}, \alpha\varepsilon'\right) \qquad \text{(II-5)}$$

Pour chaque spin la correction du premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ au propagateur se traduit par des homothéties sur m^* et ε' qui sont opposées pour chaque spin.
On remarque que G s'écrit aussi

$$G(k, \varepsilon') = \alpha^{-1}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\frac{k^2}{2m^*} - \varepsilon\right)^{-1} = \alpha^{-1}(H_{ef} - \varepsilon)^{-1}$$

avec

$$H_{ef} = \frac{k^2}{2m^*}\left(1 - g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\right) \equiv \frac{k^2}{2m^{**}} \qquad \text{(II-6)}$$

On constate l'apparition dans le Hamiltonien effectif (II-6) d'une masse effective dépendant du spin,

$$m^{**} = m^* \frac{\alpha}{\gamma} = \eta\, m^* \qquad \text{(II-7)}$$

Considérons maintenant l'influence des impuretés. Un vertex de diffusion sur la bande de conduction donne un élément de matrice

$$V_{MN} = V\, \psi_M^*(r_i)\ \ \psi_N(r_i)$$

où M et N représentent les états de Landau dans la bande de conduction et ψ_M et ψ_N les fonctions d'onde correspondantes. La moyenne sur la position des impuretés conduit à

$$\bar{V}_{MN} = \sum_{r_i} V_{MN} = V\ \delta_{MN}$$

Cet élément de matrice $\bar{V}_{MN}$ est indépendant du spin et correspond à la diffusion usuelle dans un modèle à une bande. A l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$ un tel processus peut être répété un nombre arbitraire de fois. On décrira la diffusion multiple sur une impureté en introduisant la matrice t usuelle :

$$t(\varepsilon') = \frac{V}{1+VK(\varepsilon')}$$

avec ici $K(\varepsilon', m^*) = K^\circ(\alpha\varepsilon', \frac{m^*}{\gamma})$

Il reste à considérer les vertex de diffusion sur la bande de valence qui introduisent un facteur $\frac{V}{E_v}$. Au premier ordre en $\frac{\varepsilon}{E_g}$ on ne gardera ce processus qu'une fois. On est amené à définir l'amplitude de diffusion anormale (figure 10a).

$$W = \sum_v k^\alpha \Pi^\alpha_{cv} \frac{V}{E_v 2} k^\beta \Pi^\beta_{vc}$$

En ne conservant que la partie dépendant du spin, W prend la forme opérationnelle

$$W = \frac{iV}{2mE_l} g^* \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\ k^\alpha\ \delta(r-r_i)\ k^\beta\ S^\gamma$$

W décrit les transitions qui retournent le spin, induites par couplage spin orbite, ses éléments de matrice sur la base des états de Landau s'écrivent facilement. Contrairement au cas $\vec{B}_o=0$, la moyenne de W sur la position des impuretés ne disparaît pas, car

k_α et k_β ne commutent pas ; il vient au contraire

$$\bar{W} = \frac{n_i V}{E_1} g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o = n_i V (\alpha-1)$$

Plus généralement, considérons une diffusion multiple d'ordre supérieur, du type de la figure 10b.
Pour $\vec{B}_o=0$, un tel diagramme s'annulait, par suite de la moyenne angulaire des facteur $\vec{k}.\vec{\Pi}$ situés entre deux vertex de collisions. Ici il n'en est plus de même. Pour le vérifier, réécrivons W en commutant k_β avec $\delta(r-r_i)$. En notant que $\vec{k} \times \vec{k} = - \frac{ie}{c} B_o$, nous obtenons (toujours sous forme d'opérateur) :

$$W = \frac{V g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o \delta(r-r_i)}{E_1} - \frac{g^*}{2mE_1} (\vec{k} \times \vec{\text{grad}}\, V(r-r_i)).\vec{S} \qquad \text{(II-8)}$$

Le premier terme de (II-8) fournit une contribution au diagramme complet qui n'est autre que $(\alpha-1)t(\varepsilon)$. Quant au deuxième, nous remarquons que $\vec{\text{grad}}_r V = - \vec{\text{grad}}_{r_i} V$. Si nous réinsérons cette contribution à W dans le diagramme complet, nous obtenons une expression dont tous les facteurs $V(\vec{r}-\vec{r}_i)$ sont invariants par rotation de $(\vec{r}-\vec{r}_i)$, sauf W qui se transforme comme un vecteur.

La moyenne sur r_i de ces termes sera donc nulle. En conclusion, l'inclusion du vertex W a pour effet de transformer chaque vertex V de la matrice t en un facteur αV. La matrice t <u>globale</u> (incluant les diffusions dans la bande de conduction et dans la bande de valence) sera donc

$$t = \frac{\alpha V}{1+\alpha V K}$$

Nous sommes maintenant armés pour regrouper ces résultats. La fonction de Green totale (impuretés comprises) s'écrit

$$G(k,\varepsilon) = \left(\gamma \frac{k^2}{2m^*} - \alpha\varepsilon + \frac{n_i \alpha V}{1+\alpha V K(\varepsilon)}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha} G^*(\varepsilon) \qquad \text{(II-9)}$$

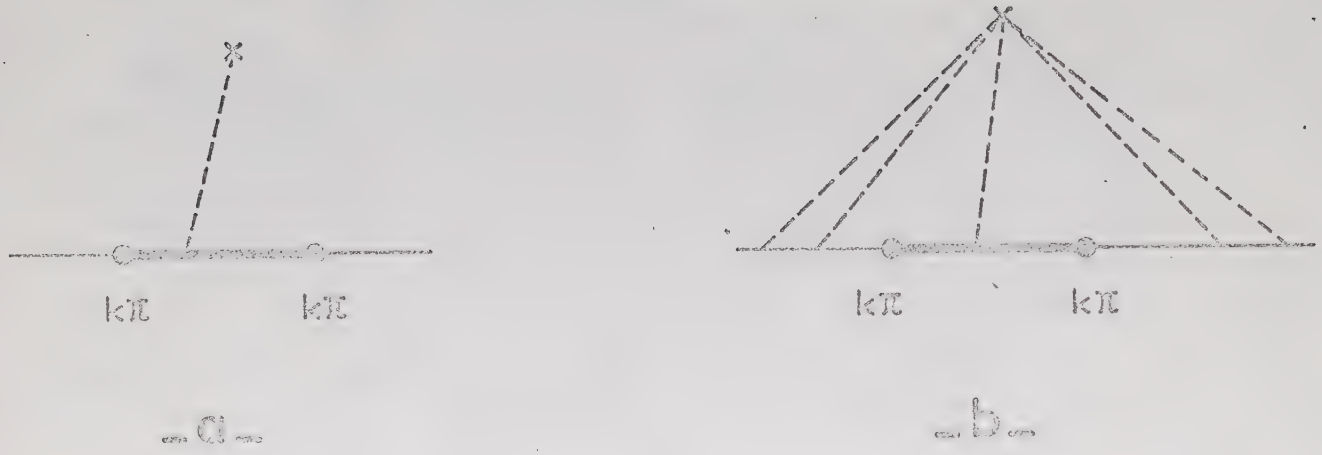


Figure 10

Diagrammes décrivant la diffusion sur la bande de valence

Figure 11

Développement de G_v en puissance du couplage interbande $\vec{k}.\vec{\Pi}$

où $G^*(\varepsilon)$ prend la forme très simple

$$G^*(\vec{k},\varepsilon) = \left(\frac{k^2}{2m^*}\frac{\gamma}{\alpha} - \varepsilon - n_i t^*(\varepsilon)\right)^{-1} = \left(H_{ef} - \varepsilon + n_i t^*(\varepsilon)\right)^{-1}$$

$$t^*(\varepsilon) = \frac{V}{1+VK^*(\varepsilon)} \qquad \text{(II-11)}$$

L'ensemble des corrections du premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ se traduit donc simplement par

i) une renormalisation de la masse, qui devient $m^{**} = m^*\eta$, et qui dépend du spin

ii) la multiplication de tous les propagateurs par $1/\alpha$.

Notons que

$$\eta = 1 + g^*\beta\, \vec{S}.\vec{B}_o \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \qquad \text{(II-12)}$$

fait intervenir E_1 et E_2 de façon systématique. Les corrections α et γ, d'origine différente, ont en fin de compte un effet analogue.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons exprimer le nombre de particules en présence de couplage spin orbite en fonction du nombre de particules calculé à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$. Par définition

$$N = \frac{1}{\pi}\int f(\varepsilon')d\varepsilon'\ \mathrm{Im\ Tr} \sum_i G_i(k,\varepsilon')$$

où $f(\varepsilon')$ est la fonction de Fermi Dirac

$$\mathrm{ImTr} \sum_i G_i(k,\varepsilon') = \mathrm{ImTr}\ G_c(k,\varepsilon') + \mathrm{ImTr}\ G_v(k,\varepsilon')$$

$G_v(\vec{k},\varepsilon')$ peut se développer comme $G_c(\vec{k},\varepsilon')$ en puissance du couplage interbande $\vec{k}.\vec{\Pi}$. Il est donné par le graphe de la figure 11, où le trait léger représente G_c. Donc

$$G_v(k,\varepsilon') = \frac{1}{E_v} + \sum_c k^\alpha \Pi^\alpha_{vc} \frac{1}{E_v^2} k^\beta \Pi^\beta_{cv} G_c(k,\varepsilon')$$

Dans le deuxième terme de G_v on ne conserve que la partie dépendant du spin, la partie indépendante du spin donnerait des corrections de non parabolicité que l'on néglige. En permutant circulairement sous la trace, on obtient :

$$\mathrm{Tr} \sum_v G_v(k,\varepsilon') = \frac{1}{E_v} + (\alpha-1)\ \mathrm{Tr}\ G_c(k,\varepsilon')$$

soit

$$N = \frac{1}{\Pi} \int f(\varepsilon')d\varepsilon'\ \ \mathrm{Tr}(\mathrm{Im}(\alpha G(k,\varepsilon'))))$$

Nous savons que $\alpha \mathrm{Im}G = \mathrm{Im}G^*$: le nombre de particules se calcule donc comme à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$, la masse effective m^* étant simplement remplacée par m^{**}. En fait, nous travaillons toujours à N donné : la variation de masse se traduira donc par une variation du potentiel chimique, qui passe de μ' à μ'^*, tel que

$$N_o(\mu'^*, m^{**}) = N_o(\mu', m^*)$$

B. CALCUL DE LA CONDUCTIVITE

1) Corrections de type zéro

Ce sont les corrections dues à la renormalisation de la masse. Elles proviennent à la fois des diagrammes interbande et intrabande.:

i) Terme interbande (figure 12a et 12b). Ils font intervenir la combinaison $\Pi^{\alpha}_{cv}\, G_v(z)\, \Pi^{\beta}_{vc}$ qui vaut :

$$\Pi^{\alpha}_{cv}\; G_v(z)\; \Pi^{\beta}_{vc} = \frac{1}{2m^*}\,\delta_{\alpha\beta}\,\left(-1+\frac{z}{E_2}\right) + \frac{ig^*}{2m}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,S^{\gamma}\left(-1+\frac{z}{E_1}\right) \qquad \text{(II-13)}$$

Le dernier terme donne une correction de type I (car fait intervenir l'orientation relative de $\vec{E}$ et $\vec{M}$). On en tiendra compte plus loin. Dans le premier terme $z = \varepsilon \pm \omega$, le terme en ω ne donne pas de correction de spin. Par contre, nous devons effectuer le changement d'origine $\varepsilon \to \varepsilon'$, et donc écrire

$$z = \varepsilon' + g^*\beta\, \vec{S}.\vec{B}_o$$

Le terme en ε' donne une contribution indépendante du spin qui est une correction de non parabolicité et qu'on néglige. Le terme en $g^*\beta\, \vec{S}.\vec{B}_o$ remplace m^* par $\frac{m^*}{\gamma}$. Le calcul est identique au cas sans champ magnétique mais avec $m^* \to \frac{m^*}{\gamma}$. D'après l'appendice 3

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i\, e^2\, \gamma}{\Pi m^*\omega}\,\delta_{\alpha\beta}\int f(\varepsilon')d\varepsilon'\ \mathrm{Tr\ Im}\ G(\varepsilon')$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i\, e^2 N^*\gamma}{m^*\alpha\omega}\,\delta_{\alpha\beta}$$

On voit apparaître un terme de jauge renormalisé, faisant intervenir la masse effective m^{**}. On remarquera dans la suite du calcul que les diagrammes interbande fournissent toujours les termes de jauge.

ii) Terme intrabande (figure 12c). Ils s'expriment en fonction du vertex effectif $\vec{j}^{\alpha}$ donné par la figure 12d

$$\vec{j}(z,z') = \frac{\vec{k}}{m^*}\left(1 - \frac{z+z'}{2E_2}\right) + \frac{ig^*}{2mE_1}\,(z-z')\,(\vec{k}\times\vec{S}) \qquad \text{(II-14)}$$

Le deuxième terme de $\vec{j}$ donne une correction de type I qu'on traitera plus loin.

En faisant le changement de variable $\varepsilon \to \varepsilon'$ dans $z+z'$ et en négligeant

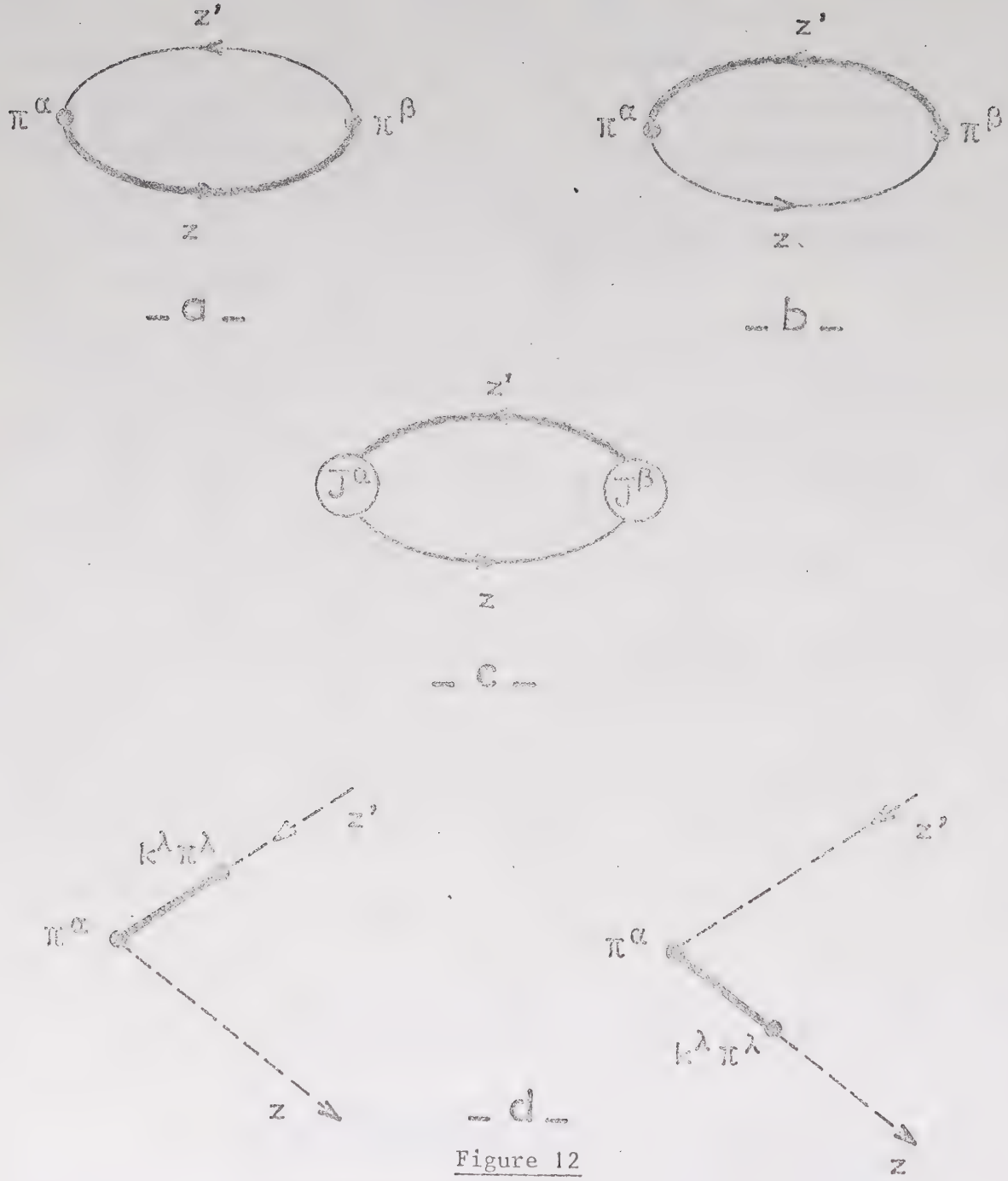


Figure 12

Diagrammes contribuant aux effets de type I

les corrections de non parabolicité

$$z + z' \to 2g^{*}\beta \vec{S}.\vec{B}_o$$

Ce terme remplace m^* par m^*/γ dans $\vec{j}$.

La conductivité se calcule à partie de la fonction $L_{\alpha\beta}(z,z')$ qui contient deux facteurs $\vec{j} = \frac{\vec{k}\gamma}{m^*}$, et deux fonctions $G = \frac{1}{\alpha} G^*$: de nouveau, le renormalisation a pour seule conséquence de corriger des électrons d'un facteur α/γ : il suffit de remplacer m^* par $m^{**} = \eta m^*$ dans les résultats obtenus à l'ordre 0 en $\frac{1}{E_g}$ (en faisant attention à maintenir N constant et non pas μ). En particulier, le terme d'ordre $\frac{1}{\omega}$ de $S_{\alpha\beta}$ compense le terme de jauge, assurant ainsi une conductivité $\sigma_{\alpha\beta}$ finie à fréquence nulle. Pour chaque direction du spin, $\uparrow$ par exemple, nous pouvons écrire la conductivité sous la forme

$$\sigma_{\alpha\beta}(N_\uparrow) = \sigma^{\circ}_{\alpha\beta}(N_\uparrow, m^*) + (\eta-1)m^* \frac{\partial \sigma^{\circ}_{\alpha\beta}}{\partial m^*} \qquad \text{(II-15)}$$

Le premier terme est la conductivité calculée à l'ordre zéro, indépendante du couplage spin orbite. Elle est donnée par (I-22b). Le deuxième terme est la correction au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ due à la dépendance en spin de la masse. On voit immédiatement qu'elle dépend de $g^*\beta \vec{S}.\vec{B}_o$, c'est donc une correction du type σ_{II}.

2) Correction de type I

i) Terme interbande (figures 12a et 12b). Il faut à présent tenir compte du deuxième terme de (II-13). Le calcul est identique au cas $B_o=0$ et conduit à

$$\sigma^{1}_{\alpha\beta} = \frac{e^2 g^*}{mE_1} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathrm{Tr}_\sigma (N_\sigma S^\gamma) \qquad \text{(II-16)}$$

ii) Terme intrabande (figure 12c). A présent on tient compte du deuxième terme de (II-14) si l'on remarque que $z-z' = -\omega$, on obtient :

$$\sigma^{2}_{\alpha\beta} = -\frac{ig^*\omega m^*}{mE_1} \mathrm{Tr}_\sigma (\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma} S^\gamma \tilde{\sigma}^{\circ}_{\lambda\beta}) \qquad \text{(II-17)}$$

où

$$\tilde{\sigma}^{\circ}_{\lambda\beta} = \sigma^{\circ}_{\lambda\beta} - \sigma_g = \sigma^{\circ}_{\lambda\beta} - \frac{iNe^2}{m^*\omega}\,\delta_{\lambda\beta}$$

(σ_g est le terme de jauge)
On voit ici aussi que le terme interbande compense le terme de jauge de $\sigma^{\circ}_{\alpha\beta}$. On peut donc écrire

$$\sigma^{1}_{\alpha\beta} + \sigma^{2}_{\alpha\beta} = -\frac{ig^*\omega\, m^*}{mE_1}\, Tr_\sigma\,(\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}\quad \sigma^{\circ}_{\lambda\beta}\, S^{\gamma}) \qquad \text{(II-18)}$$

Ce terme s'annule à fréquence nulle.

3) Effet du type II

Ici la contribution au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ à $\sigma_{\alpha\beta}$ vient de la diffusion dans la bande de valence. Comme dans le cas à champ nul $\sigma_{\alpha\beta}$ est donné par les diagrammes de la figure 13 et leurs symétriques.

i) La contribution supplémentaire au courant provenant des diagrammes 13a et 13b s'écrit :

$$\delta\vec{j}\ (z,z') = \frac{ig^*}{2mE_1}\, n_i(t(z)-t(z'))\ (\vec{k}x\vec{S})$$

On voit que $\delta\vec{j}$ doit au moins être du deuxième ordre en V. Il faut maintenant insérer cette expression dans $L_{\alpha\beta}(z,z')$, donné par (I-16). On fait ainsi apparaître une combinaison de la forme

$$\varepsilon_{\alpha\lambda\gamma}\, S^{\gamma} k^{\lambda}_{MN}\, G_N(z)\, k^{\beta}_{NM}\, G_M(z')\, n_i\ (t(z)-t(z'))$$

Dans cette expression, nous pouvons poser :

$$n_i t(z) = z - E_N + G_N^{-1}(z)$$

$$n_i t(z') = z' - E_M + G_M^{-1}(z')$$

En utilisant les éléments de matrice de k^{α}_{MN} (appendice 2 3-17 et 3-18), il est aisé d'établir la relation

$$(E_M - E_N)\, k^{y}_{MN} = - i\omega_c^{*}\, k^{x}_{MN}$$

On obtient ainsi

$$\sigma^{3}_{xx} = \frac{i g^{*} m^{*}}{m E_1}\, Tr_{\sigma}(S^{z}(\omega\sigma^{\circ}_{xy} + i\omega_c^{*}\, \sigma^{\circ}_{xx})) \qquad \text{(II-19a)}$$

$$\sigma^{3}_{xy} = - \frac{i g^{*} m^{*}}{m E_1}\, Tr_{\sigma}\,(S^{z}(\omega\tilde{\sigma}^{\circ}_{xx} - i\omega_c^{*}\sigma^{\circ}_{xy})) \qquad \text{(II-19b)}$$

On remarque que dans σ^{3}_{xy} c'est $\tilde{\sigma}^{\circ}_{xx}$ qui intervient, c'est-à-dire la conductivité moins le terme de jauge. $\tilde{\sigma}^{\circ}_{xx}$ possède donc un terme en $\frac{1}{\omega}$. A fréquence nulle, il vient

$$\sigma^{3}_{xy} = - \frac{g^{*}\omega_c^{*} m^{*}}{m E_1}\, Tr_{\sigma}\,(S^{z}\,(\frac{Ne^{2}}{m^{*}\omega_c^{*}} + \sigma^{\circ}_{xy})) \qquad \text{(II-20)}$$

σ^{3}_{xy} tend vers zéro avec Γ.

ii) Il ne nous reste plus qu'à calculer les diagrammes contenant un vertex W (figure 13a et 13b).

Nous allons exposer le calcul du terme continu de la conductivité pour un gaz dégénéré à T = 0, il sera aisé de le généraliser à $T \neq 0$. La contribution de ces diagrammes à L_{xy} s'écrit

$$L_{xy}(z,z') = \frac{n_i}{m^{*2}}\, Tr_{\sigma} \sum_{\substack{MN \\ RQ}} k^{x}_{NM}\, k^{y}_{QR}\, G_M(z) G_Q(z)\, G_N(z') G_R(z')$$

$$(W_{RN}\, t(z) + W_{MQ}\, t(z')) \qquad \text{(II-21)}$$

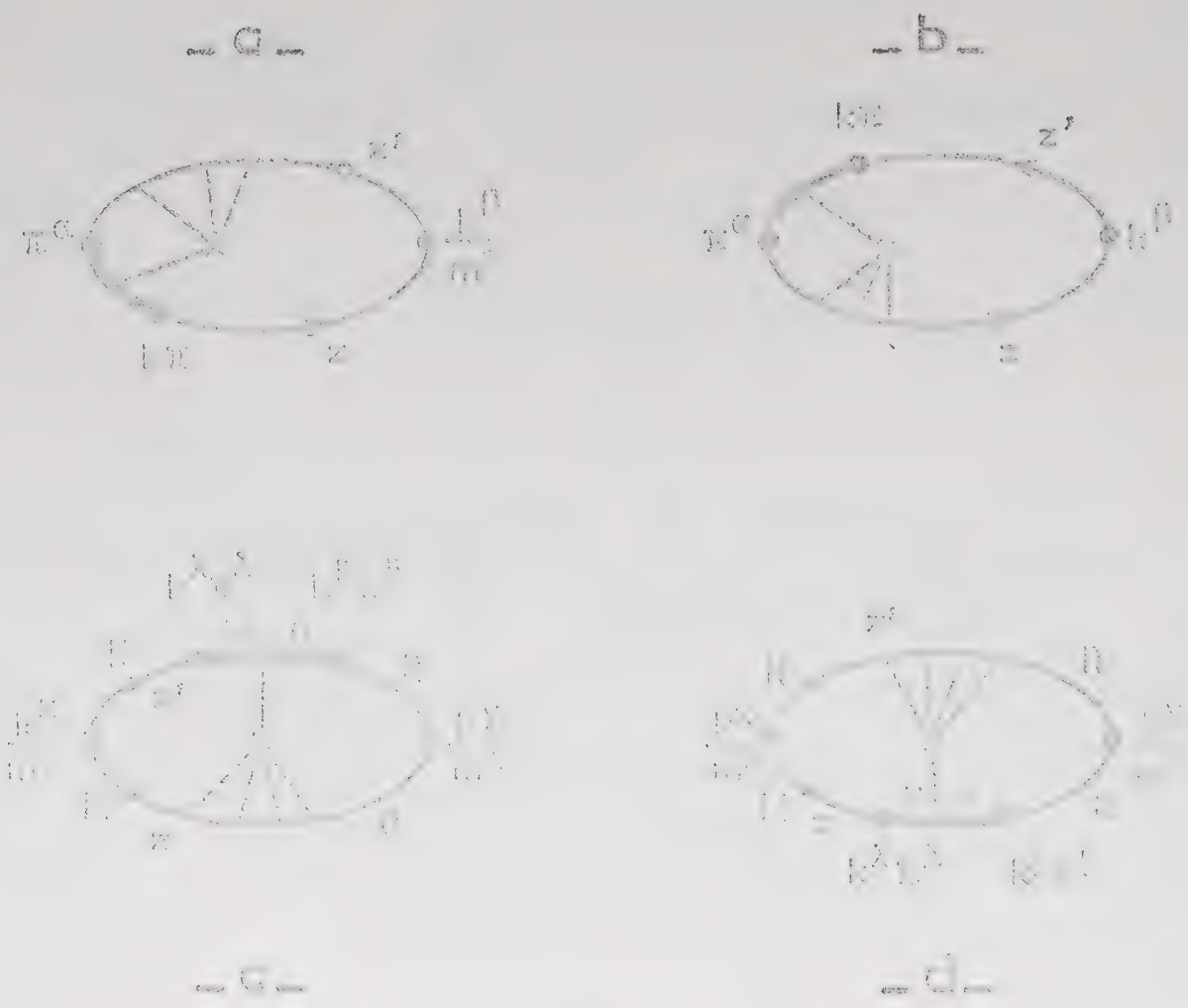


Figure 13

Diagrammes contribuant aux effets de type II

Avec $$W_{MQ} = - W_{RN} = - \frac{ig^{*}V}{2mE_1} k^{\mu}_{RQ} k^{\lambda}_{MN} \varepsilon_{\mu\lambda\gamma} S^{\gamma}$$

On voit donc que (II-21) fait apparaître la différence t(z')-t(z) qui est du deuxième ordre en V : les effets de diffusion anormale n'affectent la conductivité qu'au-delà de l'approximation de Born (un ordre en W et deux ordres en V). Conclusion identique au cas $B_o=0$.

On introduit la fonction

$$u_{\alpha\beta}(z,z') = \frac{1}{m^{*}} \sum_{MN} k^{\alpha}_{NM} G_M(z) k^{\beta}_{MN} G_N(z')$$

$L_{xy}(z,z')$ s'écrit alors

$$L_{xy}(z,z') = \frac{ig^{*}Vn_i}{2mE_1} Tr_{\sigma} \left(S^{z} \left((u_{xy}(z,z'))^2 - (u_{xx}(z,z'))^2 \right) (t(z)-t(z')) \right)$$

Nous allons distinguer les contributions à σ_{xy} provenant de z et z' du même côté ou de part et d'autre de l'axe réel. A cause du facteur t(z) - t(z') les termes $L_{\alpha\beta}(\varepsilon^{+},\varepsilon^{++})$ et $L_{\alpha\beta}(\varepsilon^{--},\varepsilon^{-})$ sont d'ordre $\omega\frac{dt}{d\varepsilon}$. Sauf pour $\omega_c^{*}/\Gamma >> 1$ quand les oscillations de t sont importantes ces termes sont d'ordre $\frac{\Gamma\omega}{\mu}$ et donc négligeables.
En exprimant les éléments de matrice de k^{α}_{NM} et k^{β}_{MN} et en négligeant des termes d'ordre Γ/μ on obtient :

$$u_{xy}(\varepsilon^{-},\varepsilon^{+}) = 2\pi(N+C) \frac{\omega_c^{*}}{\omega_c^{*2}+\Gamma^2}$$

$$u_{xx}(\varepsilon^{-},\varepsilon^{+}) = 2\pi(N+C) \frac{\Gamma}{\omega_c^{*2}+\Gamma^2}$$

C étant défini par (I-23b). Nous y négligerons les termes en $n_i\lambda$ qui sont d'ordre $(\Gamma/\mu)^{1/2}$ alors

$$C(\mu) = \mu\rho(\mu) - \frac{3N}{2}$$

et σ_{xy}^{4} s'écrit

$$\sigma_{xy}^{4} = \frac{e^2 g^* \Pi}{mE_1} \mathrm{Tr}_\sigma \left(S^z (\Pi V \Gamma (N+C)^2 \frac{\omega_c^{*2} - \Gamma^2}{(\omega_c^{*2} + \Gamma^2)^2} \right) \qquad \text{(II-22)}$$

Nous allons regrouper les résultats précédents. Dans σ_{xy}° nous négligerons aussi les termes en $n_i \lambda$ de C et D. Soit $N(\varepsilon)$ le nombre d'états d'énergie inférieure à ε, $\rho(\varepsilon) = dN/d\varepsilon$ la densité d'états. Nous posons

$$C(\varepsilon) = \varepsilon \rho(\varepsilon) - \frac{3N(\varepsilon)}{2}$$

et nous appelons $\theta(\varepsilon)$ l'angle de Hall, donné par $\mathrm{tg}\theta = \omega_c^{*}/\Gamma(\varepsilon)$.

A température finie, on peut écrire

$$\sigma_o = \frac{e^2}{m^* \omega_c^*} \int \frac{df}{d\varepsilon} \left(N(\varepsilon) \sin^2\theta - C(\varepsilon) \cos^2\theta \right) d\varepsilon \qquad \text{(II-23)}$$

$$\sigma_{II} = \mathrm{Tr}_\sigma \left(g^* \beta \vec{S} \cdot \vec{B}_o \frac{m^* - m_o}{E_o \; m^*} \right) \qquad \text{(II-24)}$$

$$\sigma_{III} = \frac{e^2 g^* \Pi}{mE_1} \mathrm{Tr}_\sigma \left(S^z \int \frac{df}{d\varepsilon} d\varepsilon (C(\varepsilon)+N(\varepsilon)) \cos^2\theta \left(1 - \frac{\Pi V}{\Gamma} (C(\varepsilon)+N(\varepsilon)) (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \right) \right) \qquad \text{(II-25)}$$

où nous avons posé $1/E_o = 1/E_1 + 1/E_2$. Le terme σ_{II} représente la correction du premier ordre en spin orbite due à la renormalisation de la masse, σ_{III} celle due à la correction des vertex. Ces deux termes sont proportionnels à l'aimantation. Par ailleurs, nous avons vu au chapitre I que le décalage des oscillations quantiques des deux populations de spin fait apparaître dans σ_o un terme proportionnel au carré de l'aimantation (σ_I).

Avant de discuter l'ordre de grandeur de ces différentes

contributions dans le cas non dégénéré puis dans le cas dégénéré, considérons la limite $B_o \to 0$ de ces expressions. Dans cette limite $\theta \to 0$ et $C \to 0$: σ_o et σ_{II} sont alors nuls ; σ_{III} redonne l'effet Hall anormal calculé en l'absence de champ magnétique. En effet (II-25) s'écrit

$$\sigma_{III} = \frac{e^2 g^*}{mE_1} Tr_\sigma \left(S^z \int \frac{df}{d\varepsilon} d\varepsilon N(\varepsilon) \left(1 + \frac{\Pi N(\varepsilon) V}{\Gamma(\varepsilon)}\right)\right) \qquad \text{(II-26)}$$

Nous retrouvons la limite $\omega = 0$ des expressions (I-32) et (I-33).

C. DISCUSSION DES RESULTATS

1) Cas non dégénéré

Nous nous placerons dans la limite ω_c^*, μ, $\Gamma \ll kT$. La fonction de distribution est $f_\sigma(\varepsilon) = A_\sigma e^{-\varepsilon/kT}$ où la dépendance en spin est contenue dans A_σ. La contribution des deux populations de spin à σ_o s'écrit

$$\sigma_{o\uparrow} + \sigma_{o\downarrow} = \frac{-e^2}{\omega^* \omega_c^*} \frac{A_\uparrow + A_\downarrow}{kT} \int e^{-\varepsilon/kT} (N(\varepsilon)\sin^2\theta - C(\varepsilon)\cos^2\theta) d\varepsilon$$

On voit qu'elle ne fait intervenir que $A_\uparrow + A_\downarrow$ qui est proportionnel au nombre total de particules et donc σ_o ne contient pas de terme proportionnel à l'aimantation :

$$\sigma_1 = 0$$

Pour calculer σ_{II} il nous faut donner une évaluation de σ_o, le problème n'est pas simple car Γ(donc θ) oscille en même temps que $\rho(\varepsilon)$ (donc que $N(\varepsilon)$ et $C(\varepsilon)$). Si l'on suppose $kT \gg \omega_c^*$ on peut remplacer dans (II-23) la parenthèse par sa moyenne sur une gamme d'énergie de largeur ω_c^*

$$N(\varepsilon)\sin^2\theta - C(\varepsilon)\cos^2\theta \to \overline{N(\varepsilon)\sin^2\theta} - \overline{C(\varepsilon)\cos^2\theta}$$

Si les collisions sont élastiques (ce que l'on a supposé), on ne peut pas moyenner sur Γ (donc sur θ) indépendamment de $N(\varepsilon)$ ou $C(\varepsilon)$, et l'on n'est guère avancé. Par contre, si les collisions sont légèrement inélastiques on doit pouvoir écrire

$$\overline{C(\varepsilon)\cos^2\theta} = \overline{C(\varepsilon)}\ \overline{\cos^2\theta} \qquad \text{(II-27)}$$

avec $$\overline{C(\varepsilon)} = \overline{\varepsilon\rho(\varepsilon) - \frac{3N(\varepsilon)}{2}}$$

Dans cette expression, on peut remplacer $\rho(\varepsilon)$ et $N(\varepsilon)$ par leurs valeurs à champ nul ; on voit donc que $\overline{C(\varepsilon)} = 0$ et que (II-23) se réduit à la formule de Drude Zener. Pour des collisions élastiques (II-27) n'est pas vrai et on voit apparaître ainsi même en régime classique des écarts à la formule de Drude Zener. Pour simplifier la discussion, nous allons les ignorer et prendre dans (II-23) (II-24) et (II-25) $C(\varepsilon) = 0$ et pour $N(\varepsilon)$ sa valeur à champ nul.

Les expressions précédentes s'écrivent alors

$$\sigma_o = \frac{e^2}{m^* \omega_c^*} \int \frac{df}{d\varepsilon} N(\varepsilon) \frac{\omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2(\varepsilon)} d\varepsilon \qquad \text{(II-23)}$$

$$\sigma_{II} = \frac{e^2 g^*}{\omega_c^*} \mathrm{Tr}_{\mathrm{II}} \left(S^z \int \frac{df}{d\varepsilon} \frac{N(\varepsilon)\Gamma^2(\varepsilon)}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2(\varepsilon)} \left(1 - \frac{\Pi V N(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\omega_c^{*2} - \Gamma^2(\varepsilon)}{\omega_c^{*2} + \Gamma^2(\varepsilon)} \right) d\varepsilon \right) \qquad \text{(II-29)}$$

Nous allons à présent évaluer σ_{II} et pour cela calculer $\left(\frac{\partial \sigma_o}{\partial m^*}\right)_N$. A cet effet nous remarquons qu'à N donné, le produit $\frac{df}{d\varepsilon} N(\varepsilon)$ est indépendant de la masse (son intégrale est égale à N) on peut l'écrire sous la forme

$$\mathrm{Na}\ \frac{\varepsilon^{3/2}}{(kT)^{5/2}}\ e^{-\varepsilon/kT}$$

où a est une constante numérique. La dépendance en masse provient donc uniquement du facteur Γ^2/ω_c^{*2}. Si nous calculons Γ à

l'approximation de Born

$$\Gamma(\varepsilon) = 2\Pi n_i V^2 \rho(\varepsilon)$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{m^{*3/2} \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{2}\ \Pi^2}$$

Nous voyons que $\frac{\Gamma^2}{\omega_c^{*2}}$ varie comme m^{*5}. Il en résulte que

$$m^* \frac{d\sigma_o}{dm^*} = - \frac{5e^2}{m^* \omega_c^*} \int \frac{df}{d\varepsilon} N(\varepsilon) \frac{\omega_c^{*2} \Gamma^2}{(\omega_c^{*2}+\Gamma^2)^2} d\varepsilon$$

et par conséquent

$$\sigma_{II} = - \frac{5e^2 n_i^*}{m^* E_o} Tr\ S^2 \int \frac{df}{d\varepsilon} N(\varepsilon) d\varepsilon \frac{\omega_c^{*2} \Gamma^2}{(\omega_c^{*2}+\Gamma^2)^2} \qquad \text{(II-30)}$$

En comparant (II-29) avec (II-30), nous voyons que le rapport de σ_{II} au premier terme de σ_{III}, que nous dénoterons σ'_{III}, est d'ordre

$$\frac{\sigma_{II}}{\sigma'_{III}} = - < \frac{5E_1}{2E_o} \frac{\omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2}+\Gamma^2} >$$

Ce rapport est $<<1$ pour de faibles angles de Hall, $\Gamma >> \omega_c^*$; il est au contraire appréciable si $\omega_c^* >> \Gamma$ ($\sim$ 10 si $E_1 \sim E_2$).
Le rapport des deux termes de σ_{III} est pour sa part d'ordre

$$\frac{\sigma''_{III}}{\sigma'_{III}} \sim - < \frac{\Pi V}{\Gamma} N \frac{\omega_c^{*2} - \Gamma^2}{\omega_c^{*2}+\Gamma^2} >$$

Ce rapport <u>change de signe</u> lorsqu'on passe des petits aux grands

angles de Hall. Dans les deux cas, il est d'ordre $\frac{\Pi NV}{\Gamma}$. En posant

$$\rho \sim \frac{1}{kT\,\lambda^3}$$

où λ est la longueur d'onde thermique de Broglie, on trouve (pour $n_i = N$)

$$\frac{\Pi NV}{\Gamma} \sim \left(\frac{kT}{\Gamma}\right)^{1/2}$$

Ce rapport est >>1 dans le cas présentement étudié. Nous concluons donc que pour un gaz classique σ''_{III} est toujours dominant par rapport à σ'_{III} et σ_{II}. La conductivité anormale se réduit à

$$-\frac{e^2 g^*}{mE_1}\,Tr_\sigma\left\{s^z\int\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)N^2(\varepsilon)d\varepsilon\,\frac{hV'(\varepsilon)\ (\omega_c^{*2}-\Gamma'^2(\varepsilon))}{(\omega_c^{*2}+\Gamma'^2(\varepsilon))^2}\right\} \qquad (II-31)$$

Il est remarquable qu'elle change de signe lorsqu'on passe de $\theta=0$ à $\theta=\Pi/2$.

2) Cas dégénéré $\omega_c^* << kT << \mu$

i) Evaluation de σ_{II} et σ_{III}

Dans l'évaluation des effets anormaux, on peut négliger les oscillations de σ_o, et utiliser une formule de Drude Zener classique ; de toute manière, on n'a de chance de voir ces effets anormaux du premier ordre que si les oscillations de σ_o, d'ordre 0 en $\frac{1}{E_g}$ sont très faibles. La seule différence avec le cas d'un Γ fini vient de ce que maintenant $\frac{df}{d\varepsilon}$ est une fonction localisée au niveau de Fermi $\varepsilon=\mu$. On a alors

$$\sigma^\circ = -\frac{Ne^2}{m^*\omega_c^*}\,\frac{\omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2}+\Gamma'^2(\mu)}$$

L'estimation de σ'_{III} et σ''_{III} ne change guère ; en particulier leur rapport

$$\frac{\sigma''_{III}}{\sigma'_{III}} = \frac{\Pi NV}{\Gamma(\mu)} \sim \left(\frac{\mu}{\Gamma}\right)^{1/2}$$

est nécessairement >> 1 pour que notre théorie soit valable. Quant au terme σ_{III} son calcul est légèrement modifié, car maintenant μ dépend de m^* si l'on maintient N constant. En écrivant la densité d'état sous la forme $\Gamma \sim m^* N^{1/3} n_i V^2$, on voit que le rapport Γ^2/ω_c^{*2} varie maintenant comme m^{*4}, au lieu de m^{*5} dans le cas classique. On obtient ainsi

$$\sigma_{II} = \frac{2e^2\beta^*}{m\omega_o} \Pi^2 \frac{\omega_c^{*2}\Gamma^2}{(\omega_c^{*2}+\Gamma^2)^2}$$

Ce facteur $\frac{4}{5}$ ne change pas l'ordre de grandeur de σ_{II} qui reste au mieux comparable à σ'_{III}, et donc complètement négligeable par rapport à σ''_{III}. De nouveau, le courant anormal est dominé par σ''_{III}.

Le seul problème essentiel est donc de comparer σ''_{III} à la partie oscillante de σ_o, qui risque de masquer l'effet "anormal" dû au couplage spin orbite.

ii) Evaluation des oscillations de σ_o

Celles-ci proviennent des oscillations de $\Gamma(\varepsilon)$, c'est-à-dire de $\rho(\varepsilon)$ ou ce qui revient au même de $K_2(\varepsilon)$. Pour évaluer l'amplitude de ces oscillations, nous reprenons rapidement l'argumentation développée dans la thèse de A. Bastin [18]. En présence d'un champ magnétique la densité d'état $\rho(\varepsilon)$ est donnée par (I-11). Nous la développerons suivant la formule de Poisson :

$$\sum_n \Phi(n+\frac{1}{2}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \int_o^{\infty} \Phi(n) \exp 2i\Pi pn dn$$

En utilisant le fait que $\varepsilon \sim \mu \gg \omega_c^*$, $\rho(\varepsilon)$ s'écrit

$$\rho(\varepsilon) = \frac{(m^*)^{3/2}\omega_c^*}{\sqrt{2}\,\Pi^2}\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\omega_c^*} + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{2}{\Pi p\omega_c^*}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{2\Pi p\varepsilon}{\omega_c^*} - \frac{\Pi}{4}\right)\right)$$

$K^+(\varepsilon)$ est relié à $\rho(\varepsilon)$ par (I-20) et par un calcul de résidu, on obtient

$$K^+(\varepsilon) = \frac{im^*(2m^*\varepsilon)^{1/2}}{2\Pi} + \frac{im^*}{2\Pi}\left(\frac{m^*\omega_c^*}{\Pi}\right)^{1/2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p}\exp i\left(2\Pi p\left(\frac{\varepsilon - n_i t}{\omega_c^*}\right) - \frac{\Pi}{4}\right)$$

$$\exp - \frac{\Pi p\Gamma}{\omega_c^*}$$

On trouve ainsi un développement en série de Fourier de $K^+(\varepsilon)$; on remarque que le premier terme de la série redonne la valeur de $K^+(\varepsilon)$ à champ nul, ce qui justifie a posteriori que si on néglige les oscillations on peut prendre pour $\rho(\varepsilon)$ sa valeur à champ nul. Le terme oscillant est plus petit que le premier d'un facteur $\sim \left(\frac{\omega_c^*}{\mu}\right)^{1/2}$ et la première oscillation est amortie d'un facteur $\exp - \frac{\Pi p\Gamma}{\omega_c^*}$.

A température finie, on peut avoir un ordre de grandeur des oscillations en calculant $\frac{df}{d\varepsilon}K(\varepsilon)d\varepsilon$. En prenant pour $f(\varepsilon)$ une gaussienne centrée sur $\varepsilon=\mu$ et de largeur kT la première oscillation est amortie d'un facteur $\exp -\Pi p\left(\frac{\Gamma}{\omega_c^*} + \frac{2\pi kT}{\omega_c^*}\right)$. Les conditions pour que les oscillations de Γ soient amorties (c'est-à-dire pour qu'on puisse prendre pour σ_o la formule de Drude Zener) sont donc soit $kT \gg \omega_c^*$ quel que soit le rapport $\frac{\Gamma}{\omega_c^*}$, soit que $\frac{\omega_c^*}{\Gamma} \ll 1$.

iii) Evaluation de σ_i en l'absence d'oscillations de σ_o

L'existence de deux populations de spin $N_\uparrow$ et $N_\downarrow$ différentes fait apparaître dans σ_o un terme proportionnel au carré de l'aimantation ; comme les oscillations de σ_o sont supposées très amorties, nous nous contenterons d'évaluer ce terme en prenant pour σ_o la formule de Drude Zener.

En posant $g(N_\uparrow) = -\dfrac{N_\uparrow \omega_c^{*2}}{\omega_c^{*2} + \Gamma_\uparrow^2}$

la conductivité totale s'écrit :

$$\sigma_{o\uparrow} + \sigma_{o\downarrow} = \frac{e^2}{m^* \omega_c^*} \left(2g\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{M^2}{4} g''\left(\frac{N}{2}\right)\right)$$

En remarquant de $\Gamma_\uparrow \sim N_\uparrow$ on obtient

$$\sigma_I = \frac{e^2}{m^* \omega_c^*} \frac{M^2}{9N} \frac{\Gamma^2 \omega_c^* (\Gamma^2 + 5\omega_c^{*2})}{(\omega_c^{*2} + \Gamma^2)^2} \qquad \text{(II-32)}$$

Pour évaluer le rapport de σ_{III} à σ_I, on calcule l'aimantation en supposant qu'on est loin de la saturation près de l'équilibre thermodynamique. On a alors $\frac{M}{N} \sim \frac{\Omega_o^*}{\mu}$,

$$\text{avec } \Omega_o^* = g^* \beta B_o \qquad \text{(II-33)}$$

Il vient ainsi

$$\delta = \frac{\sigma''_{III}}{\sigma_I} \sim \frac{\mu}{E_1} \frac{\omega_c^{*2} + \Gamma^2}{\omega_c^{*2}} \frac{\omega_c^{*2} - \Gamma^2}{3\omega_c^{*2} + \Gamma^2} \frac{\hbar NV}{\Gamma} \qquad \text{(II-34)}$$

Si $\omega_c^* >> \Gamma$

$$\delta \sim \frac{\mu}{E_1} \frac{NV}{\Gamma}$$

Pour avoir un δ grand, c'est-à-dire pour que σ_{III} soit dominant, Γ doit être très faible, à la limite $\Gamma \to 0$ ce rapport devient infini. En effet dans ce cas $\sigma_o = -\dfrac{Ne^2}{m^* \omega_c^*}$ ne dépend plus de l'aimantation.

Si $\omega_c^* << \Gamma$

$$\delta \sim -\frac{\mu}{E_1} \left(\frac{\mu}{\Gamma}\right)^{1/2} \left(\frac{\Gamma}{\omega_c^*}\right)^2$$

δ varie comme $\mu^{3/2}$ donc pour pouvoir observer σ_{III} on a intérêt à augmenter μ. Dans le cas où $\frac{\omega_c^*}{\Gamma} \to 0$ ce rapport devient infini

on est alors dans le cas à champ nul et l'effet Hall ordinaire disparaît.

3) Pour terminer, nous allons envisager le cas dégénéré quantique $kT<<\omega_c^*<<\Gamma<<\mu$

D'après le paragraphe ii) la condition $\omega_c^*<<\Gamma$ permet de négliger les oscillations de Γ et de prendre pour σ_o la formule de Drude Zener. La condition $kT<<\omega_c^*$ permet de prendre $T = 0$. Nous avons déjà discuté ce cas au paragraphe précédent, l'effet Hall anormal se réduit à σ''_{III} et δ est donné par (II-34).

Nous pouvons rapidement récapituler cette discussion.

i) Dans le cas non dégénéré (ω_c^*, μ, $\Gamma<<kT$)

La partie de la conductivité proportionnelle à M^2 s'annule :

$$\sigma_I = 0$$

On pourra donc observer l'effet Hall anormal ($\sigma_{II}+\sigma_{III}$) en faisant varier l'aimantation. Pour des petits et des grands angles de Hall le deuxième terme de σ_{III} est dominant ; il est donné par (II-31).

ii) Dans le cas dégénéré

L'effet Hall anormal se réduit encore à σ''_{III} par contre σ_I n'est plus nul. Pour l'évaluer, on suppose que les oscillations de σ_o sont très amorties (c'est-à-dire que l'une des deux conditions $kT>>\omega_c^*$ ou $\frac{\omega_c^*}{\Gamma}<<1$ est remplie). Le rapport de ces deux termes est donné par (II-34). Il devient grand et donc l'effet Hall anormal devient observable dans les deux cas limites $\omega_c^*/\Gamma>>1$ et $\omega_c^*/\Gamma\to 0$.

CHAPITRE III

CALCUL DE L'EFFET HALL ANORMAL EN PRESENCE D'UNE AIMANTATION RESONANTE

Nous envisageons à présent le cas où l'effet Hall anormal est séparé de l'effet Hall ordinaire par résonance magnétique des électrons de conduction. On applique au système un champ magnétique constant $\vec{B}_o$ parallèle à l'axe Oz et un champ radiofréquence $(\vec{E}, \vec{B})$ qui induit une précession résonante de l'aimantation des spins. Nous supposerons toujours $\vec{B}$ parallèle à Ox.

La perturbation h_1 due au champ radiofréquence s'écrit

$$h_1 = \frac{e}{c} \vec{j}.\vec{A}_1$$

$\vec{A}_1 = \vec{A}\, e^{i(-\omega t + \vec{q}\vec{r})}$ étant le potentiel vecteur correspondant à $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Dans une première partie, nous allons calculer la perturbation effective h_1 et en donner une interprétation physique. Dans une deuxième partie, nous calculerons par une méthode de Kubo au deuxième ordre le courant de Hall anormal. Ce calcul sera fait en l'absence d'impuretés dans différentes configurations. Enfin dans une troisième partie nous calculerons le courant en l'absence d'impuretés par une méthode d'équation du mouvement. Nous retrouverons ainsi les résultats du chapitre II, ainsi que ceux des paragraphes III et V du chapitre I.

A. VERTEX EFFECTIF

Nous nous plaçons en l'absence d'impuretés ($\Gamma = 0$). D'après ce qui précède nous aurons deux contributions à la conductivité un terme intrabande et un terme interbande. Pour calculer la contribution intrabande, on se ramène à la bande de conduction en

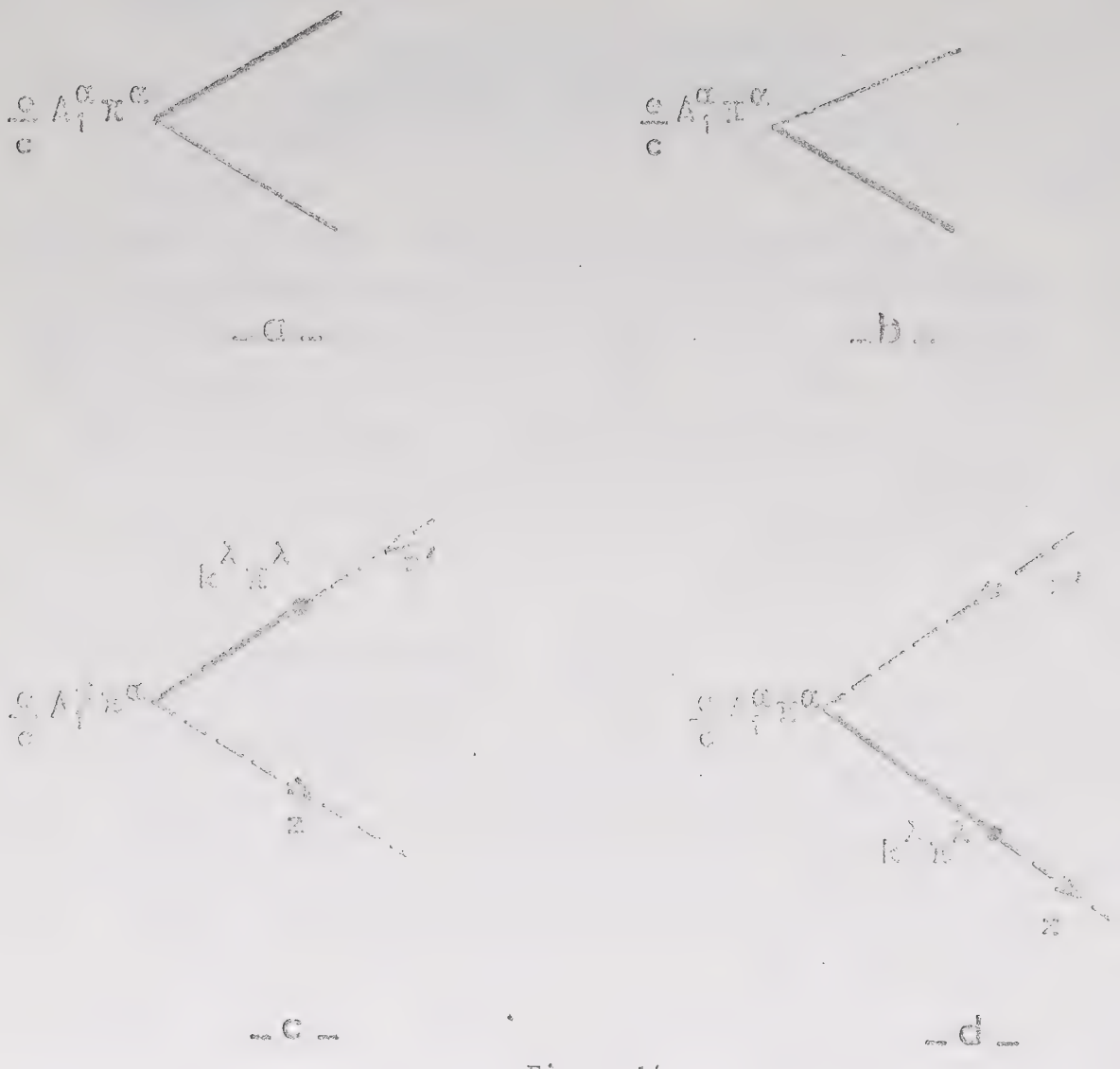


Figure 14

Diagrammes contribuant à la perturbation effective

introduisant un vertex courant effectif ; la contribution interbande s'obtient en prenant la partie off diagonale du vertex courant : $\vec{j} = \vec{\Pi}$.

De même ici on calculera la perturbation effective $\bar{h}$, mais il ne faudra pas oublier le terme interbande

$$h_1^i = \frac{e}{c} \vec{\Pi}.\vec{A}_1 \qquad \text{(III-1)}$$

donné par les figures 14a et 14b.
$\bar{h}_1$ est donné par les figures 14c et 14d.

$$\bar{h}_1(z',z) = -\frac{e}{c} A^\alpha e^{-i\omega t}(\Pi^\alpha e^{iqr} G_v(z) k^\lambda \Pi^\lambda + k^\lambda \Pi^\lambda e^{iqr} G_v(z') \Pi^\alpha)$$

En développant $G_v(z)$ au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ et en utilisant la relation (II-13) on obtient

$$\bar{h}_1(z',z) = \frac{e}{c} \vec{A}_1 . \frac{\vec{k}}{m^*} (1 - \frac{z+z'}{2E_2}) + \frac{e}{2c} \vec{A}_1 . \frac{\vec{q}}{m^*} (\frac{z-z'}{2E_2})$$

$$+ ig^* \beta (1 - \frac{z+z'}{2E_1}) (\vec{A}_1 x \vec{q}).\vec{S} - \frac{ig^* \beta}{E_1} (z-z') (\vec{A}_1 x \vec{k}).\vec{S} \qquad \text{(III-2)}$$

Les produits $\vec{A}_1 x \vec{k}$ et $\vec{A}_1 . \vec{k}$ étant symétrisés et E_1 et E_2 étant donnés par (I-36b).
Dans (III-2) z-z' fournit un terme en ω alors que z+z' donne un terme en ε ; d'après le chapitre II nous devons remplacer ε par $\varepsilon' = \varepsilon - g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o$ alors le facteur $\{1 - z+z'/E_2\}$ qui apparaît dans le premier terme de (III-2) contribuera à remplacer $\frac{\vec{k}}{m^*}$ par $\frac{\vec{k}}{m^{**}}$.
Le troisième terme de (III-2) a aussi une partie en ε qui après le remplacement de ε par ε' donnera d'une part un terme en $(g^* B)^2 (\vec{S}.\vec{B}_o) (\vec{S}.\vec{B})$, (donc en $S^x S^z$) dont la contribution au courant sera nulle, d'autre part une dépendance en vecteurs d'onde de g^* que l'on négligera.

On remarque que $\vec{q}.\vec{A}_1$ est proportionnel à div $\vec{A}_1$ qui est nul dans la jauge de Landau, le deuxième terme de (III-2) va donc s'annuler. En utilisant les relations

$$\vec{B} = \vec{rot}\ \vec{A}_1 = i\vec{q} \times \vec{A}_1$$

et

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\vec{A}_1$$

ainsi que les remarques du chapitre II (§ B.ii) la perturbation effective $\bar{h}_{1_{ef}}$ s'écrit :

$$\bar{h}_{1ef} = \frac{e}{c}\vec{A}_1 . \frac{\vec{k}}{m^{**}} + g^* \beta\, \vec{S}.\vec{B} + g^* \frac{\beta c}{E_1}(\vec{E}\times\vec{k}).\vec{S} \qquad \text{(III-3)}$$

Nous allons à présent dégager la signification physique des différents termes du vertex effectif qu'on notera désormais h_1. Il s'écrit aussi :

$$h_1 = \frac{e}{c}\vec{A}_1 . \frac{\vec{k}}{m^{**}} + g^* \beta\, \vec{S}.(\vec{B} + c\frac{\vec{E}\times\vec{k}}{E_1})$$

Il apparaît alors qu'en présence de couplage spin orbite un champ oscillant $\vec{E}$ peut renverser le spin. Le dernier terme de h_1 n'est autre que l'interaction dipolaire électrique [16].

En posant $\vec{B}' = \vec{B} + \frac{c\vec{E}\times\vec{k}}{E_1}$ (III-4)

on peut faire une analogie relativiste. En effet dans un repère en mouvement le champ magnétique $\vec{B}'$ s'exprime en fonction du champ magnétique dans un repère fixe :

$$\vec{B}' = \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\vec{v}}{c} \qquad \text{(III-5)}$$

(III-4) et (III-5) ont la même structure à condition de faire correspondre à E_1 l'énergie $m^* c^2$. Le champ magnétique est donc modifié par le couplage spin orbite, le champ $\vec{B}$ est à remplacer par le champ effectif $\vec{B}'$ donné par (III-4). On pourrait donc penser que la susceptibilité magnétique dans une expérience de RPE sera aussi modifiée par le couplage spin orbite. Nous allons montrer qu'il n'en n'est rien au premier ordre en couplage spin orbite.

En effet, l'aimantation transverse est donnée par la fonction de réponse spin-spin qui est reliée à la fonction de corrélation

$$\langle\langle T\{B'_+ S_- + B'_- S_+, S_\pm\}\rangle\rangle$$

où $B'_\pm = \frac{B'_x \pm iB'_y}{2} = B_\pm \pm \frac{ic}{2E_1}(E_z k_\pm - E_\pm k_z)$

Le terme $E_+ k_z$ est impair par réflexion et donnera une contribution nulle à la susceptibilité, de même pour le terme $k_\pm$ qui couple des états de Landau différents.
Par contre, au deuxième ordre en $\frac{1}{E_g}$ il peut y avoir une correction à la susceptibilité magnétique due au couplage spin orbite.

Nous allons à présent discuter de l'ordre de grandeur relatif des deux termes de (III-4)

$$\frac{B'-B}{B} \sim \frac{ck}{E_1} \frac{E}{B}$$

or $\frac{E}{B} \sim \frac{\omega}{cq}$

avec $q \sim \frac{\omega_p}{c}\left(1 - \frac{i}{\omega\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$

ω_p est la fréquence de plasma $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_i e^2}{m^*}$

Le rapport $\frac{ck}{E_1}$ est proportionnel à $\frac{(E_M E_c)^{1/2}}{E_1}$ où E_M est l'énergie de masse de l'électron et E_c son énergie cinétique, donc

$$\frac{B'-B}{B} \sim \frac{(E_M E_c)^{\frac{1}{2}}}{E_g} \frac{2E_g+\Delta}{E_g+\Delta} \frac{\omega}{\omega_p}\left(1 - \frac{i}{\omega\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut donner une évaluation numérique de ce rapport. Soit pour InSb dopé à $n_i = N = 10^{14}$ cm^{-3} pour une fréquence $\omega = 10^{10}$ Hz et une mobilité de 10^5 V/cm^2/s, on obtient :

$$\omega\tau \sim 10^{-2}, \quad E_M \sim 5.10^3 \text{eV}, \quad E_c \sim 5.10^{-4} \text{eV}, \quad E_g = 0,2 \text{ eV}$$

alors $\frac{B'-B}{B} \sim 0,2$

Le terme dipolaire électrique est donc dominant par rapport au terme magnétique.

B. CALCUL DU COURANT PAR UNE FORMULE DE KUBO AU DEUXIEME ORDRE

Nous allons à présent calculer le courant de Hall anormal qui est proportionnel à $\vec{E} \times M_1$ (où $\vec{M}$ est l'aimantation électronique résonante créée par le champ radiofréquence). Nous remarquons qu'il possède des composantes de Fourier continues et de fréquence 2ω et qu'il est du 2ème ordre en champ radiofréquence $(\vec{E},\vec{B})$. Nous établirons donc la formule de réponse au deuxième ordre à une perturbation H_1 ; nous l'utiliserons dans deux géométries différentes pour calculer les composantes continue et en 2ω du courant de Hall anormal.

Dans tout ce calcul nous nous plaçons en l'absence de collisions, c'est-à-dire dans la limite $\omega/\Gamma \to \infty$.

1) Formule de réponse au deuxième ordre

L'Hamiltonien du système s'écrit

$$H = H_o + H_1$$

H_o est l'Hamiltonien non perturbé et H_1 la perturbation créée par le champ radiofréquence qu'on établit de façon adiabatique.

D'après ce qui précède

$$H_1 = (h_1 + h_1^* + h_1^i + h_1^{i*})\, e^{\eta t}$$

où $\eta \to 0^+$

La fonction d'onde ψ du système se développe suivant les fonctions propres ψ_n de H_o d'énergie E_n

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$

On pose $c_n = e^{-iE_n t}\, \bar{c}_n$

D'après l'équation de Schrödinger, on a

$$i\dot{\bar{c}}_n = H_{1nm}\, e^{i(E_n - E_m)t}\, \bar{c}_m$$

A l'ordre zéro en H_1 on a $\bar{C}_o = 1$, $\bar{C}_n = 0$.

Au premier ordre en H_1

$$i\,\bar{c}_n^{\,1} = \int_{-\infty}^{t} H_{1no}(t')dt'\, e^{i(E_n-E_o)t'} \qquad \text{(III-6)}$$

$$\delta\bar{c}_o = 0 \qquad \text{(on suppose } (H_1)_{oo} = 0)$$

Au deuxième ordre en H_1

$$\bar{c}_n^{\,2} = -\int_{-\infty}^{t} H_{1nm}(t')e^{i(E_n-E_m)t'}dt' \int_{-\infty}^{t'} H_{1mo}(t'')e^{i(E_m-E_o)t''}dt'' \qquad \text{(III-7)}$$

En posant $h_1+h_1^{i} = h\, e^{-i\omega t}$

$$H_1 = (h\, e^{-i\omega t}+h^{*} e^{+i\omega t})e^{\eta t}$$

on peut expliciter les expressions (III-6) et (III-7)

$$i\bar{c}_n^{1} = \frac{h_{no}e^{i(\omega_{no}-\omega)t}}{i(\omega_{no}-\omega)+\eta} + \frac{h_{no}^{*}e^{i(\omega_{no}+\omega)t}}{i(\omega_{no}+\omega)+\eta}$$

$$\bar{c}_n^{2} = \frac{-h_{mo}}{i(\omega_{mo}-\omega)+\eta}\left(\frac{h_{nm}e^{i(\omega_{no}-2\omega)t}}{i(\omega_{no}-2\omega)+2\eta} + \frac{h_{nm}^{*}e^{i\omega_{no}t}}{i\omega_{no}+2\eta}\right)$$

$$-\frac{h_{mo}^{*}}{i(\omega_{mo}+\omega)+\eta}\left(\frac{h_{nm}e^{i\omega_{no}t}}{i\omega_{no}+2\eta} + \frac{h_{nm}^{*}e^{i(\omega_{no}+2\omega)t}}{i(\omega_{no}+2\omega)+2\eta}\right)$$

où $\omega_{mo} = E_m - E_o$

La valeur moyenne d'un opérateur A s'écrit

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_{nm} c_n^{*} A_{nm} C_m = \sum_{nm} c_o A_{on} c_n^{2} + c_o^{*} A_{no} c_n^{2*} + A_{nm} c_n^{*1} c_m^{1}$$

(en supposant $A_{oo}=0$).

Le terme continu s'écrit :

$$\langle A\rangle = \sum_{nm} A_{nm}\left(\frac{h^*_{mo}\,h_{on}}{(\omega+\omega_{mo}-i\eta)(\omega+\omega_{no}+i\eta)} + \frac{h_{mo}\,h^*_{on}}{(\omega-\omega_{mo}+i\eta)(\omega-\omega_{no}-i\eta)}\right)$$

$$+ A_{on}\left(\frac{h^*_{nm}\,h^*_{mo}}{(-\omega+\omega_{mo}-i\eta)(\omega_{no}-2i\eta)} + \frac{h_{nm}\,h^*_{mo}}{(\omega+\omega_{mo}-i\eta)(\omega_{no}-2i\eta)}\right)$$

$$+ A_{no}\left(\frac{h_{mn}\,h^*_{om}}{(-\omega+\omega_{mo}+i\eta)(\omega_{no}+2i\eta)} + \frac{h^*_{mn}\,h_{om}}{(\omega+\omega_{mo}+i\eta)(\omega_{no}+2i\eta)}\right) \qquad \text{(III-8)}$$

Le terme en $e^{-2i\omega t}$ s'écrit

$$\langle A\rangle = \sum_{nm} \frac{A_{nm}\,h_{on}\,h_{mo}}{(\omega+\omega_{no}-i\eta)(-\omega+\omega_{mo}+i\eta)}$$

$$+ \frac{A_{on}\,h_{mo}\,h_{nm}}{(-\omega+\omega_{mo}-i\eta)(-2\omega+\omega_{no}-2i\eta)} + \frac{A_{no}\,h_{om}\,h_{mn}}{(\omega+\omega_{mo}+i\eta)(2\omega+\omega_{no}-2i\eta)} \qquad \text{(III-9)}$$

Pour la suite des calculs il est commode d'écrire h sous la forme

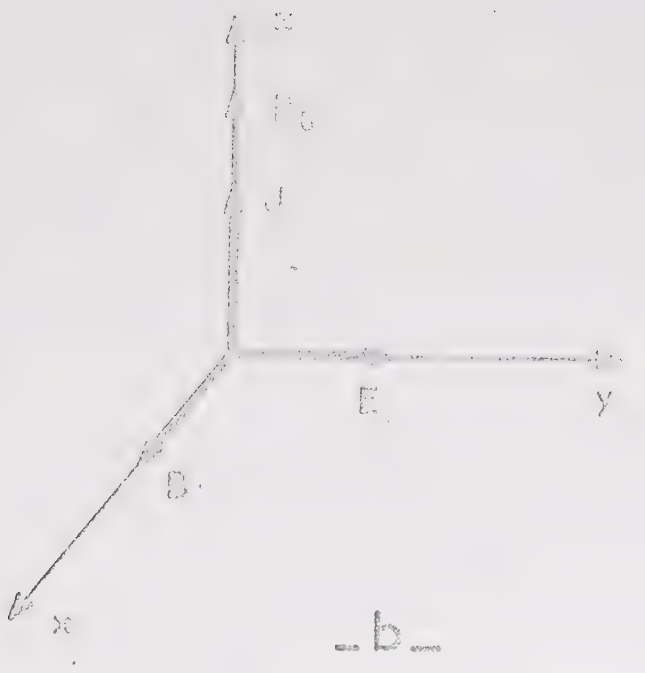
$$h = a + b + c + h_i$$

avec
$$a = \frac{e}{c}\,\frac{\vec{A}_1.\vec{k}}{m^{**}} \qquad \text{(III-10)}$$
$$b = g^*\beta\,\vec{S}.\vec{B}$$
$$c = \frac{g^*\beta c}{E_1}\,(\vec{E}\times\vec{k}).\vec{S}$$
$$h_i = \frac{e}{c}\,\vec{A}_1.\vec{\Pi}$$

Nous cherchons à calculer le courant de Hall anormal, l'opérateur A figurant dans (III-8) et (III-9) sera alors l'opérateur courant. Nous avons vu au chapitre précédent que les termes intrabande se calculent à partir de l'opérateur courant effectif (II-14).

$$\vec{J}(\omega) = -e\vec{j}_{ef}(\omega) = -e\,\frac{\vec{k}}{m^{**}} + i\frac{g^*\omega e}{2mE_1}\,(\vec{k}\times\vec{S}) \qquad \text{(III-11)}$$

-a-



-b-

Figure 15

Deux géométries pour la mesure du courant anormal dans une expérience de RPE

où m^{**} est défini par (II-7). La contribution interbande vient de l'opérateur $-e\vec{\Pi}$. Il nous faudra tenir compte de ces deux contributions, mais avant nous allons donner l'expression de l'aimantation $\vec{M}$.

D'après ce qui précède, elle n'est pas modifiée par le couplage spin orbite au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$, elle est donc donnée par les équations du mouvement en l'absence de celui-ci :

$$\dot{M} = g^{*}\beta\ \vec{B}\times\vec{M} \text{ dont la résolution conduit à}$$

$$M^x = -\frac{\Omega_o^{*}\ g^{*}\beta B}{\omega^2-\Omega_o^{*2}}\ M^z \qquad \text{(III-12a)}$$

$$M^y = -\frac{i\omega g^{*}\beta B}{\omega^2-\Omega_o^{*2}}\ M^z \qquad \text{(III-12b)}$$

Ω_o^{*} étant défini par (II-33).

2) Calcul du courant

Nous allons à présent calculer le courant de Hall anormal dans une expérience de RPE et pour deux géométries différentes.

a) La première géométrie envisagée est celle de l'expérience réalisée par Chazalviel et Solomon [1]. Le champ $\vec{E}$ est parallèle à Oz, $\vec{B}$ est parallèle à Ox et le courant continu est mesuré suivant Ox (figure 15a). Les opérateurs a b c h_i donnés par (III-10) s'écrivent dans ce cas

$$a = \frac{e}{c} A \frac{k^z}{m^{*}}$$

$$b = g^{*}\beta B^x (S^{+}+S^{-})$$

$$c = \frac{2ig^{*}\beta cE}{E_1} (k^{+} S^{-} - k^{-} S^{+})$$

Où $S^{\pm} = \frac{S^x \pm i S^y}{2}$

et $k^{\pm} = \frac{k^x \pm i k^y}{2}$

On peut remarquer que $b^* = b$ et $c^* = -c$.

i) Calcul du courant continu

Nous allons d'abord calculer la contribution du terme intrabande de l'opérateur courant. D'après (III-11) celle-ci s'écrit

$$J^x(0) = -\frac{ek^x}{m^{**}} = -\frac{e}{m^{**}}(k^+ + k^-)$$

Dans l'expression (III-8) du courant vont donc figurer les opérateurs $-e\frac{k^{\pm}}{m^{**}}$, h, h^*. Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ et d'après les règles de sélection sur les opérateurs k^z, $k^{\pm}$ et $S^{\pm}$ dans l'expression (III-8) seuls peuvent figurer les opérateurs $-e\frac{k^{\pm}}{m^{**}}$, b, c. Nous pouvons en plus remarquer que $\frac{1}{m^{**}} - \frac{1}{m^*}$ est proportionnel à S^z et b proportionnel à $S^{\pm}$ donc la contribution de ce terme au courant sera nulle (trace sur les spins). Les opérateurs figurant dans (III-8) seront donc $\frac{k^{\pm}}{m^*}$, b, c.

En tenant compte de ces remarques et en utilisant les règles de commutation :

$$\{k^+, k^-\} = -\frac{m^* \omega_c^* c^*}{2} \qquad \text{(III-13a)}$$

$$\{S^+, S^-\} = \frac{S^z}{2} \qquad \text{(III-13b)}$$

on obtient pour le courant

$$\langle J^x(0)\rangle = 2e\frac{g^* \beta c}{E_1}(\vec{M} \times \vec{E})^x \qquad \text{(III-14a)}$$

$$\langle J^y(0)\rangle = 0 \qquad \text{(III-14b)}$$

$\vec{M}$ est donné par (III-12a) et (III-12b).

Calculons à présent la contribution du terme interbande, l'opérateur courant est alors $-e\vec{\Pi}$. D'après les règles de sélection sur $\vec{\Pi}$ et $S^{\pm}$ dans l'expression (III-8) seuls vont figurer les opérateurs $-e\vec{\Pi}$, b et h_i. En développant au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ on obtient en

négligeant les termes non résonants

$$<-e\Pi^x> = -<J^x(0)> \qquad \text{(III-15a)}$$

$$<-e\Pi^y> = 0 \qquad \text{(III-15b)}$$

Donc dans cette géométrie la composante continue du courant est nulle.

ii) Calcul de la composante en $e^{-2i\omega t}$ du courant

Le calcul est analogue au précédent : la partie interbande provient de l'opérateur courant interbande $-e\Pi^x$, le terme intrabande s'obtient à partir de l'opérateur courant effectif

$$J^x(2\omega) = -\frac{ek^x}{m^{**}} + ig^* \frac{\omega e}{mE_1}\,(k^y S^z - k^z S^y)$$

dont seul le terme $\frac{-ek^x}{m^{**}}$ contribue. A partir de (III-9) on obtient :

$$<J^x(2\omega)> = \frac{e^2 g^*}{2mE_1} E^z \left(-3M^y + \frac{2i\omega\omega_c^* M^x + \omega_c^{*2} M^y}{\omega_c^{*2} - \omega^2}\right) \qquad \text{(III-16a)}$$

$$<J^y(2\omega)> = \frac{e^2 g^*}{2mE_1} E^z \left(3M^x + \frac{2i\omega\omega_c^* M^y - \omega_c^{*2} M^x}{\omega_c^{*2} - \omega^2}\right) \qquad \text{(III-16b)}$$

b) La deuxième géométrie envisagée est celle de la figure 15b. Le champ électrique est parallèle à Oy et on mesure le courant suivant Oz.

i) Composante continue

Sa partie intrabande se calcule à partir de l'opérateur

$$J^z(0) = -e\frac{k^z}{m^{**}}$$

Or k^z permute avec la perturbation, c'est un bon nombre quantique et la valeur moyenne de $J^z(0)$ sera nulle.

Il reste le terme interbande, les trois opérateurs intervenant dans (III-8) sont alors $-e\Pi^z$, $\frac{e}{c} A^y \Pi^y$, $g^* \beta\, B^x S^x$ et l'on obtient

$$\langle -e\Pi^z \rangle = - \frac{e^2 g^*}{mE_1} \; E^y M^x \qquad \text{(III-17)}$$

Dans la géométrie de la figure 15b, il existe une composante continue au courant donné par (III-17).

ii) Composante en $e^{-2i\omega t}$

L'opérateur courant total est alors

$$J^z(2\omega) = - \frac{ek^z}{m^{**}} + \frac{ig^*\omega e}{mE_1} (k^x S^y - k^y S^x) - e\Pi^z$$

Par un calcul analogue au précédent, il vient

$$\langle J^z(2\omega) \rangle = \frac{e^2 g^*}{2mE_1} E^y \left(-3M^x + \frac{2\omega_c^* (i\omega M^y + \omega_c^* M^x)}{\omega_c^{*2} - \omega^2} \right) \qquad \text{(III-18)}$$

Nous allons à présent retrouver et interpréter ces termes en résolvant les équations du mouvement.

C. CALCUL DU COURANT PAR LES EQUATIONS DU MOUVEMENT

1) Equations du mouvement

Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ et d'après (III-3) h_1 peut également s'écrire

$$h_1 = g^* \beta \, \vec{S}.\vec{B} + \frac{e}{c} \frac{\vec{k}}{m^{**}} \left(\vec{A}_1 + \frac{g^* c m^*}{2mE_1} \vec{S} \times \vec{E} \right)$$

On voit donc apparaître une correction au potentiel vecteur $\vec{A}_1$; on pose

$$\vec{A}_1' = \vec{A}_1 + \frac{g^* c}{2E_1} \frac{m^*}{m} \vec{S} \times \vec{E}$$

$\vec{A}_1'$ crée un champ électrique effectif $\vec{E}' = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1'}{\partial t}$ donc

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{g^*}{2E_1} \frac{m^*}{m} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{S} \times \vec{E}) \qquad \text{(III-19)}$$

Jusqu'à présent la perturbation due au champ électrique était décrite en terme de potentiel vecteur et nous avions remarqué que les corrections de jauge provenaient de la partie interbande de l'opérateur courant. Nous pourrions procéder de même ici, mais nous avons préféré utiliser un potentiel scalaire. Nous ne garderons alors que la partie intrabande de l'opérateur courant effectif. Le Hamiltonien effectif s'écrit alors

$$H_{ef} = \frac{k^2}{2m^{**}} + g^* \beta \vec{S}.\vec{B} + e \vec{E}'.\vec{r} \qquad \text{(III-20)}$$

et l'opérateur courant

$$\vec{J} = - \frac{e\vec{k}}{m^{**}} - \frac{g^* e}{2E_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{k}}{m} \times \vec{S} \right) \qquad \text{(III-21)}$$

Or au paragraphe A nous avons montré que l'aimantation n'était pas modifiée au premier ordre en couplage spin orbite. L'aimantation et le courant sont donc découplés et on peut écrire

$$\left\langle \frac{\vec{k}}{m} \times \vec{S} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{k}}{m} \right\rangle \times \langle \vec{S} \rangle = \left\langle \frac{\vec{k}}{m} \right\rangle \times \vec{M}$$

Alors au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{g^*}{2E_1} \frac{m^*}{m} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{M} \times \vec{E}) \qquad \text{(III-22)}$$

$$\langle \vec{J} \rangle = - e \left\langle \frac{\vec{k}}{m^{**}} \right\rangle + \frac{g^*}{2E_1} \frac{m^*}{m} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{J}_o \times \vec{M}) \qquad \text{(III-23)}$$

Nous poserons $\vec{J}_1 = - e \left\langle \frac{\vec{k}}{m^{**}} \right\rangle$ (III-24)

et $\vec{J}_2 = \frac{g^*}{2E_1} \frac{m^*}{m} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{J}_o \times \vec{M})$ (III-25)

$\vec{J}_o$ étant le courant $\vec{J}_1$ calculé à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$.

$\vec{J}_1$ obéit à l'équation du mouvement

$$\dot{\vec{J}}_1 = i \{H_{ef}, \vec{J}_1\} = \frac{e}{m^{**}c} (\vec{B}_t \times \vec{J}_1) + \frac{Ne^2}{m^{**}} \vec{E}' \qquad \text{(III-26)}$$

$\vec{J}_1$ se calcule donc comme en l'absence de couplage spin orbite à condition de considérer que l'électron possède une masse effective m^{**} et est soumis à un champ électrique effectif $\vec{E}'$. Le courant total possède ainsi deux contributions distinctes :

$$< - e \vec{J}_{ef} > = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

Nous pouvons remarquer que dans le premier terme de (III-26), le champ magnétique $\vec{B}_t$ est la somme du champ statique et du champ oscillant

$$\vec{B}_t = \vec{B}_o + \vec{B}$$

Nous allons négliger la contribution de $\vec{B}_1$ à ce terme : en effet à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$ $\vec{J}_1$ est proportionnel à $\vec{E}$ un terme en $(\vec{B}_1 \times \vec{E})$ dans (III-26) peut produire un courant continu ; ce courant est dû à la pression de radiation et ne correspond pas à l'effet cherché. Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ le terme résonant de $\vec{J}_1$ est proportionnel à $\vec{E}\times\vec{M} \sim \vec{E}\times\vec{B}$ et la contribution de $\vec{B}\times\vec{J}_1$ à (III-26) est du troisième ordre en $(\vec{E},\vec{B})$ donc négligeable.
Nous allons à présent résoudre les équations (III-22) (III-24) (III-25) et (III-26) dans différents cas.

2) Cas d'une aimantation statique parallèle à Oz

Nous nous plaçons dans la géométrie du chapitre II, le champ électrique est parallèle à Ox et on mesure le courant suivant Oy. Le tenseur conductivité $\sigma_{\alpha\beta}$ est défini par

$$<J^{\alpha}> = \sigma_{\alpha\beta} E^{\beta} \qquad \text{(III-27)}$$

Le courant $\vec{J}_o$ se calcule d'après (III-26) et vaut

$$\vec{J}_o = \frac{Ne^2}{m^*}\left(\frac{i\omega\vec{E} + \vec{E}\times\vec{\omega}_c^*}{\omega^2 - \omega_c^{*2}}\right) \qquad \text{(III-28)}$$

Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ il nous faut évaluer $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$. Le calcul de $\vec{J}_1$ est analogue à celui de $\vec{J}_o$ et donne

$$\vec{J}_1 = Tr_\sigma \frac{Ne^2}{m^{**}}\left(\frac{i\omega\vec{E}' + \vec{E}'\times\vec{\omega}_c^{**}}{\omega^2 - \omega_c^{**2}}\right) \qquad \text{(III-29)}$$

On voit apparaître deux contributions du premier ordre en $\frac{1}{E_g}$, l'une qui provient de la différence $\vec{E}'-\vec{E}$ soit $\delta\vec{J}_1'$, l'autre ($\delta\vec{J}_1''$) qui dépend du couplage spin orbite à travers la différence $m^{**}-m^*$.

En combinant (III-22) et (III-29) on obtient

$$\delta\vec{J}_1' = \frac{e^2 g^*}{2mE_1}\frac{\omega^2(\vec{E}\times\vec{M}) + i\omega\omega_c^* M\vec{E}}{\omega^2 - \omega_c^{*2}}$$

$\delta\vec{J}_1''$ s'obtient par un développement limité au voisinage de $m^{**}=m^*$.

En se rappelant que

$$m^{**} - m^* = m^*(\eta-1)$$

(η étant défini par (II-12)). On obtient

$$\delta\vec{J}_1'' = (\eta - 1)\, m^* \frac{\partial\vec{J}_o}{\partial m^*}$$

L'évaluation de $\vec{J}_2$ est immédiate à partir de (III-25) et (III-28) et on trouve :

$$\vec{J}_2 = \delta\vec{J}_1'$$

Donc dans ce cas le courant total s'écrit

$$\langle\vec{J}\rangle = \vec{J}_o + (\eta-1)m^*\frac{\partial\vec{J}_o}{\partial m^*} + \frac{e^2 g^*}{2mE_1}\frac{\omega^2(\vec{E}\times\vec{M}) + i\omega\omega_c^* M\vec{E}}{\omega^2 - \omega_c^{*2}} \qquad \text{(III-30)}$$

En utilisant l'expression (I-8) du tenseur conductivité en l'absence de collisions et à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$ on voit que le résultat (III-30) est équivalent à

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\circ}_{\alpha\beta} + (\eta-1)\frac{\partial\sigma^{\circ}_{\alpha\beta}}{\partial m^*} + \sigma_{\alpha\beta}^{\ 1} + \sigma_{\alpha\beta}^{\ 2} + \sigma_{\alpha\beta}^{\ 3}$$

$\sigma_{\alpha\beta}^{\ 1} + \sigma_{\alpha\beta}^{\ 2}$ sont donnés par (II-18) et $\sigma_{\alpha\beta}^{\ 3}$ par (II-19b). Ce résultat est concordant avec le chapitre II car en l'absence de collisions $\sigma_{\alpha\beta}^{\ 4} = 0$. On retrouve également sur (III-30) le résultat (I-10) : en l'absence de collisions et à $\omega_c^* \neq 0$ le courant anormal continu s'annule.

3) Cas d'une aimantation résonante dans la géométrie de la figure 15a

Comme le champ électrique est parallèle à Oz, $\vec{J}_o$ ne possède qu'une composante parallèle à Oz :

$$\vec{J}_o = \frac{iNe^2\vec{E}}{m^*\omega} \qquad \text{(III-31)}$$

Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ la composante continue du courant est nulle. En effet d'après (III-25) et (III-22) il est clair que $\vec{J}_2 = 0$ et $\vec{E}' = \vec{E}$. La seule contribution en $\frac{1}{E_g}$ est alors $\delta\vec{J}_1''$:

$$\delta\vec{J}_1'' = \frac{iNe^2\vec{E}}{m^{**}\omega}$$

Mais elle est proportionnelle à $\vec{E}$ donc oscille en $e^{-i\omega t}$ et ne possède pas de composante continue. On retrouve donc le résultat du paragraphe précédent : en l'absence de collisions et dans la géométrie de l'expérience de Chazalviel et Solomon le courant continu est nul. L'effet observé expérimentalement est donc lié à l'existence de collisions, ceci est analogue au résultat obtenu pour une aimantation statique parallèle à $\vec{B}_o$ (III-30).

Nous pouvons incidemment calculer la composante en $e^{-2i\omega t}$ du courant.

D'après (III-25) et (III-31) :

$$J_2^x = - \frac{e^2 g^*}{mE_1} E^z M^y$$

$$J_2^y = \frac{e^2 g^*}{mE_1} E^z M^x$$

En combinant (III-33) et (III-37) et en remarquant que $\delta\vec{J}_1''$ n'a pas de composante à la fréquence 2ω on obtient

$$J_1^x = - \frac{ie^2 \omega g^*}{mE_1} E^z \left(\frac{2i\omega M^y - \omega_c^* M^x}{\omega_c^{*2} - 4\omega^2} \right)$$

$$J_1^y = \frac{ie^2 \omega g^*}{mE_1} E^z \left(\frac{\omega_c^* M^y + 2i\omega M^x}{\omega_c^{*2} - 4\omega^2} \right)$$

Si on effectue la somme $\vec{J}_1 + \vec{J}_2$ on retrouve le résultat (III-16) du paragraphe précédent.

4) Cas d'une aimantation résonante dans la géométrie de la figure 15b

Le champ électrique est parallèle à Oy ; la géométrie est semblable à celle du 2) et à l'ordre zéro en $\frac{1}{E_g}$ $\vec{J}_o$ est encore donné par l'expression (III-28). Au premier ordre en $\frac{1}{E_g}$ on recherche un courant parallèle à Oz. Comme précédemment $\vec{J}_2$ et $\delta\vec{J}_1''$ ne contribuent pas à la composante continue du courant. Il nous reste alors à calculer $J_1^z = \delta J_1'^z$. En remarquant que dans l'équation du mouvement (III-26) pour J_1^z le terme $\vec{J}_1 \times \vec{B}$ s'annule on obtient

$$\dot{J}_1^z = - \frac{e^2 g^*}{2mE_1} (\dot{M}^x E^y)$$

soit en intégrant

$$J_1^z = - \frac{e^2 g^*}{2mE_1} (M^x E^y)$$

On voit apparaître ici une composante continue du courant qui existe même en l'absence de collisions. Le calcul de la composante en $e^{-2i\omega t}$ est immédiat, J_1^z reste inchangé et en combinant (III-25) et (III-28) on obtient

$$J_2^z = \frac{i\omega g^* e^2}{mE_1} E^y \left(\frac{-i\omega M_x + \omega_c {}^* M^y}{\omega_c {}^{*2} - \omega^2} \right)$$

Ces résultats sont les mêmes que (III-18).

CONCLUSION

Nous allons à présent résumer le travail qui vient d'être exposé et en dégager les principaux résultats.

Dans le cas d'une aimantation statique nous avons calculé l'effet Hall anormal pour diverses valeurs de paramètres ω, ω_c^* et Γ.

Nous nous sommes d'abord placés dans le cas ω et $\omega_c^* \neq 0$ et $\Gamma = 0$, c'est-à-dire à champ magnétique fini et en l'absence de collisions. Alors le tenseur conductivité s'écrit (I-10)

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{m^*\omega_c^*}\left(\frac{N_\uparrow \omega_{c\uparrow}^{**2}}{\omega_{c\uparrow}^{**2}-\omega^2}+\frac{N_\downarrow \omega_{c\downarrow}^{**2}}{\omega_{c\downarrow}^{**2}-\omega^2}\right)+\frac{(g^*-g_o)e^2M^z}{m\bar{E}_1}\;\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_c^{*2}} \qquad \text{(IV-1)}$$

ω_c^{**} étant la fréquence cyclotron calculée avec une masse "effective" m^{**} dépendant du spin.

On voit sur (IV-I) apparaître deux types de termes proportionnels à l'aimantation : le premier provient de la dépendance en spin de la masse effective, il sera donc proportionnel à $\frac{\partial \sigma_{xy}^{\circ}}{\partial m^*}$, le deuxième conduit à un courant en $\vec{E}\times\vec{M}$ et est donné par le deuxième terme de (IV-I). Il est intéressant d'étudier les limites $\omega_c^* \to 0$ et $\omega \to 0$ de (IV-I) ; on notera que le résultat obtenu dépend de l'ordre dans lequel on opère. Si ω_c^* tend vers zéro d'abord, l'effet Hall normal disparaît et l'effet anormal se réduit à

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{m\bar{E}_1}(g^*-g_o)\,M^z \qquad \text{(IV-2)}$$

Ce terme est indépendant de la fréquence.

Si ω tend vers zéro d'abord, l'effet Hall anormal disparaît.

Nous avons ensuite envisagé le cas $\omega_c^* = 0$ et $\Gamma \neq 0$; nous ne donnerons ici que les résultats dans le cas dégénéré à T = 0. Alors

$$\sigma_{xy} = \frac{(g^*-g_o)e^2}{mE_1} M^z \left(\frac{\omega-i\Gamma}{\omega+i\Gamma} + \Pi NV \frac{\Gamma}{(\omega+i\Gamma)^2} \right) \qquad \text{(IV-3)}$$

On remarque immédiatement que (IV-3) ne s'obtient pas, comme on aurait pu le penser, en remplaçant dans (IV-I) ω par $\omega+ i\Gamma$. A la limite $\Gamma= 0$ on retrouve (IV-2). Le premier terme de (IV-3) donne un coefficient de Hall anormal $R_s \sim \rho^2$ (ρ = résistivité) et le deuxième terme conduit à $R_s \sim \rho$. Le rapport de ces deux termes est $\frac{\Pi NV}{\Gamma}$. Dans le cas dégénéré et pour $\Gamma \ll \mu$ ce rapport est grand et le deuxième terme de (IV-3) est dominant. Il n'en n'est pas de même à température finie et pour un rapport $N/_{ni}$ petit.

La troisième étape était tout naturellement de prendre ω_c^* et $\Gamma \neq 0$ et $\omega=0$. Ici aussi nous ne donnerons les résultats que dans le cas dégénéré et pour $m^*/m \ll 1$ et $g^*/g_o \gg 1$. Il apparaît plusieurs termes liés à l'aimantation. D'abord un terme "parasite" σ_I provenant de la dépendance non linéaire de $\sigma_{xy}{}^{\uparrow}$ en $N_{\uparrow}$. Ce terme est proportionnel au carré de l'aimantation. Comme dans (IV-1) on obtient deux termes proportionnels à l'aimantation. L'un (σ_{II}) est lié à l'existence d'une masse effective dépendant du spin et s'écrit (II-24)

$$\sigma_{II} = Tr_\sigma \left(g^* \beta \vec{S}.\vec{B}_o \frac{m^*}{E_o} \frac{\partial \sigma_o}{\partial m^*} \right)$$

($\sigma_o \equiv \sigma_{xy}^{\circ}$)
on ne l'évaluera que dans le cas où on peut négliger les effets quantiques sur σ_o et le calculer par une formule de Drude Zener classique. Enfin il reste le véritable effet Hall anormal σ_{III} qui s'écrit dans le cas où on peut négliger les effets quantiques

$$\sigma_{III} = -\frac{e^2 g^*}{mE_1} M^z \frac{\Gamma^2}{\omega_c^{*2}+\Gamma^2} \left(1 - \frac{\Pi NV}{\Gamma} \frac{\omega_c^{*2}-\Gamma^2}{\omega_c^{*2}+\Gamma^2}\right)$$

A la limite $\omega_c^* \to 0$ on retrouve le résultat (IV-3) et pour $\Gamma=0$ on trouve un effet nul. Dans les cas $\omega_c^* >> \Gamma$ et $\omega_c^* << \Gamma$ l'effet Hall anormal $(\sigma_{II}+\sigma_{III})$ est dominé par le 2ème terme de σ_{III}. Pour pouvoir être observé, ce dernier doit être grand devant σ_I. Ceci est réalisé d'abord dans le cas classique ($kT >> \mu >> \omega_c^*$) où $\sigma_I = 0$ ensuite dans le cas dégénéré ($\omega_c^* << kT << \mu$) à la limite $\omega_c^*/\Gamma << 1$, et $\omega_c^*/\Gamma >> 1$.

Dans le cas d'une aimantation résonante et en l'absence de collisions ($\omega_c^* \neq 0$, $\Gamma = 0$) nous avons calculé le courant de Hall anormal. Celui-ci est proportionnel à $\vec{E}\times\vec{M}$ et possède donc une composante continue et une composante de fréquence 2ω. Nous nous sommes intéressés surtout au courant continu qu'on observe expérimentalement.

Pour $\vec{E}$ parallèle à Oz le courant continu mesuré perpendiculairement à Oz est nul, l'effet observé expérimentalement est donc lié à l'existence de collisions (cf. limite de (IV-1) à $\omega = 0$).

Par contre pour $\vec{E}$ perpendiculaire à Oz, le courant continu parallèle à Oz n'est pas nul et vaut

$$J^z = - \frac{e^2 g^*}{2mE_1} M^x E^z$$

Il reste bien sûr à inclure les collisions dans ce calcul.

BIBLIOGRAPHIE

1 J.N. CHAZALVIEL and I. SOLOMON
Phys. Rev. Let., 29, 1676 (1972)

2 R. KARPLUS and J.M. LUTTINGER
Phys. Rev., 95, 1154 (1954)

3 J. SMIT
Physica, 24, 39 (1958)

4 J.M. LUTTINGER
Phys. Rev., 112, 739 (1958)

5 L.E. GUREVICH et I.N. YASSIEVICH
Soviet Phys. Solid State, 4, 209 (1963)

6 J. KONDO
Prog. Theor. Phys., 27, 772 (1962)

7 YU KAGAN et L.A. MAKSIMOV
Soviet Phys. Solid State, 7, 422 (1965)

8 F.E. MARANZANA
Phys. Rev., 160, 421 (1967)

9 R.C. FIVAZ
Phys. Rev., 183, 586 (1969)

10 L. BERGER
Phys. Rev. B 2, 4559 (1970)

11 S.K. LYO and T. HOLSTEIN
Phys. Rev. Let., 29, 423 (1972)

12 N. POTTIER-FAYET
Thèse de 3è cycle, Paris (1970)

13 P.LEROUX HUGON and A. GHAZALI
J. Phys. C. Proc. Phys. Soc., London 5, 1072 (1972)

14 V.N. ABAKUMOV et I.N. YASSIEVICH
Sov. Phys. JETP, 34, 1375 (1972)

15 E.O. KANE
J. Phys. Chem. Solids, 1, 249 (1957)

16 Y. YAFET
dans Solid State Physics, Vol. 14 (édité par F. Seitz et D. Turnbull, Academic Press, N.Y.(1960))

17 J.M. LUTTINGER and W. KOHN
Phys. Rev., 97, 864 (1955)

18 A. BASTIN
Thèse de Doctorat d'Etat, Paris (1972)

APPENDICE 1

Anomalous Hall effect in semiconductors

A. BASTIN, C. LEWINER ET N. FAYET

J. Phys. Chem. Solids, 31, 817 (1970)

APPENDICE 2

Quantum oscillations of the Hall effect of a fermion gas with random impurity scattering.

A. BASTIN, C. LEWINER, O. BETBEDER-MATIBET et P. NOZIERES

J. Phys. Chem. Solids, 32, 1811 (1971)

APPENDICE 3

A field theoretical approach to the anomalous Hall effect in semiconductors.

C. LEWINER, O. BETBEDER-MATIBET et P. NOZIERES

A paraître au J. Phys. Chem. Solids